数学教学

2005年第7期

目　　录

全国人民代表大会常务委员会委员,原国家教委副主任柳斌先生为本刊创刊五十周年题词:

热爱语文和数学吧，识字和运算是人类由蒙昧时代向现代文明社会飞跃的两个巨轮。

「数学教学」五十周年庆

二〇〇五年 柳斌

立足上海, 面向全国; 服务基层, 力求创新

——庆祝《数学教学》创刊50周年

本刊编辑部

《数学教学》已经度过了50年的风雨历程. 前后200期的文字, 可以说是中华人民共和国成立以来数学教育发展的一种历史见证.

1955年, 创立华东师大数学系的教授们, 希望为中学数学界的老师们做些实事. 于是就有了《数学教学》的创刊. 从那时开始, 刊物的宗旨就是"立足上海, 面向全国". 起先的几期, 大都是华东师大数学系的教授们的文字, 以后则请上海和华东地区的教授和中学数学教师撰文, 影响逐渐扩至全国. 50年来, 刊物的作者来自全国各个省市, 包括海内外. 但是, 我们还是注意反映了上海的数学教育的动态. 特别是1980年代后期, 上海单独实行课程改革, 单独举行高考. 我们一直力图反映上海的数学教育改革信息, 供读者参考. 今后我们还会继续这样做.

上海一向是对外的窗口, 现在正计划建成国际化的大都市. 华东师大数学系是我国数学教育界对外联系密切的平台, 享有国际声誉. 借此便利, 《数学教学》有意反映国外的数学教育动态, 为读者提供海内外的数学教育信息. 随着我国数学教育界和国际交往的扩大, 这方面的任务会更重. 我们希望继续保持这一国际性的特色.

50年来, 我们独家刊登了许多重要的文章. 其中包括江泽民主席访问澳门濠江中学的报道; 数学大师陈省身的题字、演讲, 以及生前最后的数学教育谈话; 还有苏步青、吴文俊、李大潜、顾泠沅等著名教授的论文. 此外, 从1993年开始, 每年都登载教育部批准的"数学教育高级研讨班"的纪要, 10余年的积累可以说是中国数学教育改革的一份客观的学术记录. 这些论文具有很高的学术水平和时代意义. 读者对此也表示了热烈的欢迎. 我们决心继续发挥本刊的优势, 组织更多更重要的独家稿件, 满足读者的需求.

《数学教学》的一个传统是面向全国的数学教学第一线, 欢迎来自基层的实际经验. 为广大的读者和作者服务是我们的最高宗旨. 一个小的例子是我们一直坚持"不用稿件一律免费退稿"的制度. 尽管这样做工作量非常大, 我们打算继续保持这一优良的传统. 借此机会, 我们要对多年来关心和爱护本刊的作者和读者, 表示衷心的感谢. 没有你们的支持, 《数学教学》会寸步难行.

数学教育, 作为一门科学还相当年青, 现在正处于蓬勃发展的时期. 我们伟大的祖国正在和平崛起. 那么, 具有中国特色的数学教育理论和实践, 也一定会在未来的岁月中建设起来, 拓展开来. 《数学教学》愿意在这一伟大的事业中, 力求创新, 为基层服务, 为读者服务, 决不辜负时代赋予我们的使命.

(上接第7-30页)

帮助我们解释某种现象.

2. 利用几何知识建模是数学建模的重要方法之一. 而向量是解决这一几何问题的有效工具.

本例是《新专题教程·高中数学7·数学建摸》(即将由华东师范大学出版社出版)中的一个例子.

《数学教学》创刊杂忆

曹锡华*

《数学教学》创刊已经50周年了. 谨以以下的回忆文字, 记叙当年, 怀念老友.

华东师范大学数学系成立于1951年. 不过, 主要骨干教师要到1952年才从各个院校调集而来. 我来自浙江大学. 那时任数学系主任的孙泽瀛先生从上海交通大学调来, 也是浙大校友. 李锐夫先生来自复旦, 程其襄先生则来自同济. 此外, 还有山西大学的钱端壮、交通大学的雷垣、圣约翰大学的魏宗舒等教授先后来到华东师大. 这些教授原来都没有从事"师范教育"的经验. 要创办一所新中国的重点师范大学, 的确是一件新的任务, 不过大家的热情都很高.

1950年代初, 国家的既定方针是学习苏联. 师范教育很自然地以"莫斯科师范学院"为学习的榜样. 我们注意到该校教学计划中, 既有很深的高等数学课程, 也有《初等代数研究》、《初等几何研究》的课程. 由于工作的需要, 委任我当了"初等数学"教研组的组长. 我一面搞基础数学研究, 一面上《初等数学复习与研究》课程. 实际上, 用公理化方法处理数系的发展, 很严谨, 也很繁, 不太好教. 初等几何用阿达玛写的课本, 题目很难.

那时, 学校里专门聘有研究教育学的苏联专家. 她一再提出"师范大学为中学服务"的要求. 现在看来, 这并不错. 后来在全国范围内一再提出"师范性"问题. 有些人认为师范大学不必搞现代数学的研究, 只要围绕"中学需要"进行科研教学就可以了. 这种观点对师范大学的发展危害很大, 是错误的.

作为师范大学的数学系如何为中学服务呢? 系主任孙泽瀛先生提出要办一本面向中学的数学杂志, 大家都很赞成. 于是就请数学系的同仁写文章, 第一期很快凑起来了. 1955年7月正式创刊. 孙先生自然地出任主编. 由于编辑工作繁忙, "初等数学"和"数学教学法"的教学任务繁重, 从上海中学调入余元希先生. 后来《数学教学》的常务编辑工作自然也由他负责了.

我不久离开了初等数学教研组, 仍旧从事代数研究. 不过, 对中学数学还是关心着. 50年来, 我陆续为《数学教学》写过一些文章. 1980年我和华罗庚、丁石孙等一起出席在美国伯克利召开的国际数学教育大会, 并在《数学教学》上发表文章加以介绍. 据说那篇文章是第一次在国内报道"问题解决"的教学模式.

当年创办《数学教学》杂志的那些教授们, 多半已经故去. 但是他们用高等数学的修养为中学数学教学服务的精神,值得我们继承发扬.

希望《数学教学》在新的世纪越办越好.

(上接第7-17页)

想必须得到教师的认同才能在教学中得到落实, 信其道, 才能践其行. 但是, 当前教师的培训不再是理论的说教, 而是提供实践上的指导, 要开发出具体的课案, 让教师能进行模仿, 并在实践中进一步创造. 在这方面, 我们还很薄弱, 需要化大力气给予改进.

参考文献:

[1] 陈昌平主编. 《数学教育比较与研究》. 华东师范大学出版社. 1995年5月.

[2] 刘兼、孙晓天主编. 《数学课程标准解读》. 北京师范大学出版社. 2002年6月.

*曹锡华教授是华东师范大学数学系名誉系主任, 华东师范大学数学系原系主任.

祝愿·回忆·希望

郑启明*

《数学教学》于1955年创刊, 至今已有半个世纪了. 值此创刊50周年之际, 我表示衷心祝贺.

我自1954年至1978年, 曾经在华东师范大学数学系工作过. 目睹了本刊的筹办、创刊, 后来还参与了一些编审工作, 如今看到它越办越好, 感到十分高兴, 借此机会, 向本刊编委会和编辑部同志们为本刊的发展付出了辛勤劳动, 表示敬意. 向本刊稿件的作者和广大读者, 热情地关心支持刊物, 表示感谢. 祝愿本刊能跟上新时期经济、科技、教育等各方面迅速发展的步伐, 与时俱进, 开拓创新, 办出特色, 为普通中学数学教学的改革创新, 为普通中学数学教学质量的提高, 做出新的、更多的贡献!

《数学教学》办成今天这样, 不是一件容易的事. 她经历着一个酝酿、筹办、创刊和发展的过程, 期间还因"文化大革命"的原因, 经历了一次停刊、复刊的折腾, 可见刊物发展的艰辛. 尽管本刊创办发展遇到种种困难, 但是靠领导支持, 广大读者的关爱和同行的支持, 当然, 还靠编者的努力, 终于克服种种困难, 办出了成绩.

据我的片断记忆, 上个世纪五十年代初期, 我们学苏联那一套, 各级各类学校的数学教学计划安排、课程设置、各门课程的教学大纲乃至教材、教法等, 基本上是照搬苏联的. 1954—1955年, 我国教育主管部门根据中央制定的教育方针政策, 决定从我国实际情况出发, 总结自己的中等学校数学教学经验, 有分析地汲取外国有益的东西, 在中学数学教学方面搞出我国自己的东西, 于是着手修订中学教育计划, 修订中学数学教学大纲, 编写中学数学教材, 并倡导总结研究和改进中学数学教学工作. 当时有关的报刊, 围绕中学数学教学, 刊登了不少经验性、理论性和讨论性的文章, 颇为热烈. 在这样背景下, 作为教育部直属大学之一的华东师范大学的数学系, 理应为建设我国中学数学课程、教材体系和教学方法等作出自己的贡献. 1954年, 时任数学系系主任的孙泽瀛教授提出编辑出版一本刊物的倡议, 此议得到当时数学系系务委员们的一致赞同. 经议定, 刊物面向广大中学数学老师、中学数学教学研究者和初等数学爱好者. 它是一本中学数学的教育性刊物, 为区别于一般数学的研究性或通俗性刊物, 本刊定名为《数学教学》. 为什么刊名中没有"中学"两字? 我想有两层意义: 一是避免与某些刊物同名; 二是内容方面可以阔广些, 可以刊登一些中学数学教材中所没有, 但中学数学老师应该知道的东西, 如极限问题、多项式理论、几何尺规作图问题、中外数学史料等等. 本刊宗旨是为本刊面向的对象服务, 向他们介绍有关的新知识和提供有关资料, 交流教学的新经验, 研讨有关问题等, 为读者在中学数学教学方面总结经验、研究探索解决问题, 撰文交流, 提供一个园地. 总之, 形势发展的需要是创办本刊的推动力, 这是一. 另一方面, 当时, 学校领导强调联系中学, 全系上下经常到中学去, 我系中学数学教学法教研室的全体教师更甭说了, 除了组织学生去中学见习、实习外, 还派青年教师去附中兼课, 高年级学生中还成立了初等数学课外研究小组. 在联系中学过程中, 我系结识了许多中学数学老师, 其

*本文作者系"国家贫困地区义务教育工程"项目专家组顾问. 曾任华东师范大学数学系常务副系主任、教务长, 原国家教育委员会督导司司长.

中包括多位当时的“名牌”教师. 他们都盼望华东师大数学系早日编辑出版一本刊物, 认为这是推进中学数学教学研究, 提高中学数学教学质量的急需. 广大中学数学教师的呼声是本刊创办的催化剂. 于是立刻动手筹办. 经报批、联系出版社、成立编委会、组稿、审稿、发稿等程序, 《数学教学》第一期终于在1955年问世. 创刊的头两年, 编辑工作几乎由孙泽瀛先生一手包办, 临时雇佣一人 (即金曼玲女士,她不幸中年病逝) , 负责收稿件、联系出版社、送稿、取清样、结账和发稿费、审稿费等内外勤工作; 编委会由我系、兄弟高校数学系的资深教授、教师和上海市几位中学“名牌”教师组成, 孙泽瀛先生任主编, 每年召开一次编委会. 平时, 编委们分别负责审稿, 对来稿提出处理意见, 虽是初创时期, 但寄稿人多半是资深教授、专家, 编审工作认真, 流程比较规范, 刊物质量较高. 主要困难是广大中学数学老师还不知道本刊的出版, 本刊宣传也不够, 主动投稿的不多, 只是约请本系、兄弟学校数学系和熟悉的中学数学名师撰稿, 遇到名人来我系讲学, 当然要请他写稿, 钱宝琮教授的文章就是一例, 还刊登本系高年级学生的一些作品, 稿源很紧缺, 本拟出双月刊, 但为了保证质量, 1955年出了两期, 1956年出了四期. 期间, 可能由于刊登有关几何尺规作图的文章, 引来了一个小插曲, 两年时间里收到不少自称解决了“用尺规将任意角三等分问题”的稿子. 早已证明不可能的事, 而去盲目求证, 实在是浪费宝贵的时间和精力. 开始, 孙泽瀛先生还是请几何教研室同志认真作答复, 但此类稿件不断地寄来, 实在答不胜答, 最后干脆发出声明完事.

1956年下半年, 余元希先生由上海中学调至我系数学教学法教研室任教, 他精于初等数学, 具有丰富的中小学数学教学经验, 善于总结中小学数学教学经验和研究教材教法, 并有很强的写作和编撰工作能力, 办事认真负责, 特别是熟悉中学数学界同行. 这时正值孙泽瀛先生忙于系行政和几何研究班的教学工作, 包办本刊编辑工作实在难以为继. 余元希先生调来, 恰逢其时. 经系里讨论, 请余先生担任常务副主编, 实际上刊物编辑工作全部落到了他的肩上. 同年初冬本刊编委会议上, 大家认为, 形势发展很快, 季刊已跟不上形势发展, 无法满足读者需求. 决定克服困难, 出月刊. 由于包括余先生在内, 大家都是在完成教学科研和行政、社会工作之外兼职承担编审工作的, 又要每月一期, 真是难为余先生了. 当时, 各地投来稿件倒不少, 而稿件质量参差不齐, 能用的不足于满足每月刊物版面之需, 经常出现临近发稿还缺稿的情况, 迫于无奈, 余先生自己写稿补缺, 我记得他曾请我帮他做过这种“补缺”工作. 余先生为本刊做到了尽心尽力. 1958年后, 余元希先生任本刊主编. 后来, 有人曾批判他利用编辑之便, 刊登自己的东西, 我认为这种批判很不公平.

“文革”期间, 《数学教学》停刊. “文革”后, 我恢复了全部工作. 其时, 拨乱反正, 百废待举, 我根本没想到刊物复刊的事. 感谢邹一心同志向我提出了此事, 在老邹的提醒敦促下, 我当然同意, 并同系主任曹锡华教授等系领导同志商议, 得到大家同意后, 立即向校领导提交了本刊复刊的报告并获准. 本刊能及时复刊, 功劳属于老邹同志. 复刊后, 邹一心同志任常务副主编, 他积极努力地进行组稿工作,凡遇到市里或全国性的有关中学数学教学方面的会议, 他都争取参加, 以便组稿, 真是见缝插针. 在复刊后的一段时间里, 邹一心同志总是将每期刊物的稿件做认真整理, 在发稿前送给我. 我不是主编, 为何送来? 老邹说是“把关”, 于是我尽量抽出时间认真读每期稿件, 并做点文字修改, 直到我离开华东师大去教育部工作为止.

我离开数学系整整27年了, 感谢《数学教学》编辑部同志们与我保持联系, 赠送给我刊物. 感谢之余, 我谨向刊物提点希望.

一是现在举国上下正在认真实践“三个代表”重要思想, 抓住机遇, 集中力量, 全面建设小康社会, 坚持科学发展观, 建立和谐社会, 并确立了向西部倾斜政策, 把农村教育作为发展

(下转第7–24页)

沟通的桥梁 交流的平台
——庆贺《数学教学》创刊50周年

200041 上海市教育委员会教学研究室 张福生*

华东师大数学系创办的《数学教学》杂志今年已经50周岁了. 一个人如果进入到50岁,用赞美的话说, 称之为“知天命”之年; 在现实生活中, 50岁却是步入老年之始, 不久就要退休了. 但《数学教学》杂志却由于办刊人的敬业勤业乐业, 由于办刊方向正确, 内容丰富实在, 所以几十年来, 尤其是近十几年来, 越来越受到读者的欢迎, 越来越焕发出青春般的活力.

我与《数学教学》打交道有40余年历史, 记得在我1959——1964年就读于华东师大数学系的学生时代, 就是她的一名读者. 近二十余年来, 我在担任上海市教研室数学教研员和上海市教委教研室副主任、上海中小学课程教材改革委员会办公室副主任期间, 又成为《数学教学》杂志的一名读者兼作者, 也受聘担任过几届编委. 在亲身经历中, 我深深感到,《数学教学》杂志已经成为上海和全国数学课程、教材、教学改革中沟通情况的桥梁; 交流经验与成果的平台, 为上海和全国的课程教材改革和教学改革作出了积极的贡献.

我认为, “吸取改革的营养为改革服务, 介绍教师的成果以服务于教师”, 这就是《数学教学》之所以有活力、受欢迎的根本.

1. 《数学教学》几十年如一日地热情介绍上海和全国数学课程、教材与教学改革的情况. 上世纪90年代初, 上海中小学课程教材改革刚刚兴起, 我国解放后第一套数学课程标准《上海义务教育数学课程标准(征求意见稿)》和《上海高级中学数学课程标准(征求意见稿)》发表, 以此为依据编写的上海一期课改新教材面世, 并在卢湾区的所有中学和杨浦区的所有小学以及各区的课改试验学校试验. 由于教材是逐年分册出版的, 大家很希望了解新教材的整体设计, 了解新教材教学中的注意点, 我应编辑部要求, 写了介绍上海一期课改数学教材体系改革的文章, 就改革的背景, 新教材的改革要点以及新教材教学中要关注的问题作了说明. 几年中,《数学教学》发表了有关专家学者很多介绍新教材的文章, 上海数学教材主编陈昌平教授关于上海新编数学教材的长篇文章和关于国内外数学教材比较研究的文章, 影响很大. 全国新一轮课改和上海二期课改在新世纪到来前夕拉开序幕,《数学教学》又大量发表介绍新课改理念、设想, 课程标准要点, 改革建议等文章, 鼓励教师展开讨论, 成为广大数学教师了解新课改情况的桥梁、学习新课改精神的导师. 期间, 我受杂志百花齐放氛围的影响, 在邹一心、赵小平教授的鼓励下, 与他们合作撰写、发表了借鉴国内外经验、改革中小学数学教材的文章, 对几何和统计等部分的改革提出一些设想, 求教于读者刊友, 引起大家的关注.

2. 《数学教学》积极交流上海和全国数学教师的教学经验. 每期《数学教学》都有一批关于数学教学研究、解题方法研究和教学探索研究的经验文章, 这些文章, 涉及内容丰富多彩, 不少见解独特精彩, 有些案例令人叫绝! 我以为, 课改最关键、最艰巨的攻坚在课堂. 课程

*本文作者现任中国教育学会中学数学教学专业委员会学术委员会副主任, 中国教育学会课程专业委员会副理事长, 上海市教育学会中小学数学专业委员会副理事长, 上海市教育委员会教学研究室和上海中小学课程教材改革委员会办公室顾问. 曾任上海市教育委员会教学研究室副主任, 上海中小学课程教材改革委员会办公室副主任.

理念、课程标准、新编教材再好, 也只有落实到学生身上才能发挥作用, 而课堂教学是课程教材落实到学生的最直接的渠道. 课堂教学的种种有效、高效的做法从哪里来? 决不能靠课程教材编者拍脑袋编出来, 也不能靠几个教学专家关门想出来, 只能靠广大一线教师在课堂教学实践中逐步探索、积累提炼、创新发展出来! 《数学教学》的每期都有几篇来自第一线教师的富有独特的新创见解与做法的文章. 可以毫不夸张地说, 几十年来, 《数学教学》对于推进上海和全国的数学教学改革确实作出了重大贡献, 特别对推动广大中学数学教师关注和实施新课改、新教材, 起了非常积极的作用.

3. 《数学教学》热情支持各地数学教师特别是边远地区青年教师在数学教学研究中的成果和各种观点, 真正做到"不拘一格". 《数学教学》的又一个可贵之处, 是编辑的眼睛不是只盯着上海和一些大城市, 不是只想着名牌学校和名牌教师, 他们头脑里时刻想着我国广大农村和边远地区, 关心困难学校和薄弱学校的教师, 不仅经常发表针对差异、缩小差距、改变面貌等方面的经验, 还经常发表名不见经传的学校老师的文章, 交流大家在数学教学研究中得到的成果和各种不同的观点. 我的母校江苏省江阴市青阳中学, 地处一个小镇, 一次我竟然在《数学教学》上看到有这所学校戚祥云老师的内容精彩的文章. 后来得知戚老师被授予江苏省数学特级教师称号. 我不知《数学教学》发表文章与特级教师间有怎样的关系, 但我佩服编辑部的慧眼独具! 我想, 几十年来, 象戚老师这样受到《数学教学》热情支持的农村、边远地区学校的数学教师特别是青年教师, 肯定有一大批, 而从杂志文章的阅读中获益的教师更是成千上万!

在庆贺《数学教学》五十诞辰之际, 我还想就刊物的服务方向, 向编辑部的朋友们提出三个"立足"的建议:

第一, 服务范围要坚持"立足上海,面向全国". 上海是一个海纳百川、最具有文化包容性的城市, 又是融入全国、服务全国、最具有文化辐射力的城市. 作为这个城市在全国有影响力的数学教学专业刊物, 应该立足上海, 面向全国. 第一, 要积极反映上海课程教材改革的活跃情况和有关文章, 吸引全国专家学者和教师对上海改革提出意见和建议; 第二, 要发表更多反映全国新一轮课改的各种文章, 交流大家的经验和问题. 总之, 要为推进上海和全国的数学课程、教材与教学改革, 作出应有的更大的贡献.

第二, 服务对象要坚持"立足改革, 服务教师". 《数学教学》是面对数学教师的刊物, 而当前数学教师特别关注的焦点, 就是数学课程教材和教学改革的实施. 教师的问题、困惑、疑虑, 都在改革实践中发生, 也需要以改革的实际经验来解决. 因此, 《数学教学》必须"立足改革", 把主要篇幅用于反映数学课程教材教学的情况、经验与问题. 建议在庆贺创刊50周年之际, 向读者发放一个实在的问卷, 做一次读者"愿望与建议"的全面调查, 使刊物能更有针对性地做好对教师的服务工作, 真正成为中学数学教师感到"有用有效"的良师益友.

第三, 服务内容要坚持"立足课堂, 扎根教学". 数学教学的生命力在课堂. 当前教师最迫切的需求是怎样把新课程的理念、新教材的设计具体落实到课堂, 怎样把自主学习、合作学习、探究学习等新的学习方式的要求, 变为具体的课堂教学行为. 《数学教学》杂志要立足课堂, 扎根于第一线教师的教学实践, 多反映广大数学教师在课堂教学实践中实实在在探索、研究的文章, 特别是课堂教学中的生动案例和相关分析. 有人说"细节决定成败", 我以为, 在教学中, 至少可以说是"细节决定成效". 希望多组织发表一些数学课堂教学中细节性但极具活力的短小精悍的案例和体会文章, 如情景的设计、内容的问题化、设问和讲评等等, 还可以集中反映同一内容不同教学设计和教学过程.

最后, 祝《数学教学》永远生根于数学教学的实践中, 开花在数学教师的心中, 迎来更加辉煌的岁岁年华!

《数学教学》——理论与实践的有机结合

710003 陕西省西安中学 薛党鹏

1994年我从陕西师范大学毕业时, 恩师李元中教授向我推荐了三本数学教育杂志, 其中之一即为《数学教学》. 记得李教授当时看中她的原因之一, 即为她具有理论与实践相结合的特点. 从此后, 《数学教学》就成为了我的良师益友, 1999年6月, 在研究生导师罗增儒教授的建议下, 我抱着试一试的态度, 将自己的一篇习作——"数形结合与数学思维品质的培养"投寄给了她. 8月22日, 我意想不到地收到了编辑部的录用函, 当晚, 我高兴地彻夜未眠; 9月3日, 我又收到了编辑老师寄来的校对稿, 看到编辑老师对于一个普普通通的中学教师的文章予以了彻头彻尾的"大修大补"之后, 我感动得热泪盈眶; 10月15日, 我如愿以偿地收到了载有我的数学教研"处女作"(《数形结合中的常见错误》)的刊物——《数学教学》1999年第5期. 2000年初, 我又有幸地在陕西师大聆听了《数学教学》的主编、著名数学教育专家——张奠宙教授所做的报告, 感触颇深, 收益匪浅. 值此刊物创刊50周年之际, 特记述我与她的缘分于上, 以与各位作者、读者以及编辑老师共勉.

1. 办刊宗旨求真务实——寓理于例而又与时俱进.

以中学数学教师作为阅读对象的刊物在全国有40余家, 但是相对于其他数学教育刊物而言, 《数学教学》的最大特点在于她充分重视了数学教学理论与数学教学实践的有机结合. 这一点可以说得到了包括笔者在内的教学第一线数学教师的普遍认可.

《数学教学》求真务实的办刊宗旨还体现在她对于国内外数学教育信息的及时关注, 例如, 对于上海青浦教改实验的宣传, 世界数学教育大会、全国高师数学教育会议、北京数学家大会的报道, 以及江总书记澳门求征几何题解的反馈, 弗赖登塔尔的教育思想与中国之行的记载, 一些著名数学家, 如华罗庚、陈景润、陈省身的适时报道; 等等, 这些内容都得到了一线数学教师的一致好评与喜爱.

2. 编辑态度认真负责——心系读者而又尊重作者.

多年来, 《数学教学》对于来稿一律予以及时回复并免费退稿; 对于定稿, 编辑老师在作者同意的前提下, 大都进行了恰如其分地修改、润色; 在对定稿反复修改、多重审核的前提之下, 该刊还将校对稿寄予作者进行校正; 2001年该刊又率先设置了电子邮箱, 鼓励电子投稿.

3. 定稿原则质量第一——倾情办刊而又不唯名利.

在经济利益之下, 当前有些刊物向作者索要所谓的"审稿费"、"编辑费"、"版面费"等等; 或者集资办增刊, 筹款评论文; 或者"大家"来稿不拒、约请名人撰文; 等等, 这些不正常的现象在地处经济发达地区——上海的《数学教学》处却从未发生.

4. 编后漫笔富有特色——实话实说而又针砭时弊.

"编后漫笔"作为《数学教学》的一个特色栏目向来都是广大读者的最爱, 其内容多年来一直受到中学一线老师与教研员的厚爱. 该栏目的内容或者高瞻远瞩地指导教研, 或者求真务实地指导教学, 或者一针见血地痛斥时弊, 或者联系时政地借石攻玉, 阅读完毕常常给人一种茅塞顿开、豁然开朗之感觉.

作为《数学教学》的一位忠实读者, 我诚恳地希望她继续茁壮成长, 发扬光大!

一份杂志与一方天地

410300 湖南省浏阳市一中教育集团艺术学校 徐树成

《数学教学》是一份成熟的数学教育教学杂志，她定位于中学数学教学，为基础教育服务．不但有国际国内先进的数学教育教学理论，还有数学一线的教学案例；不但关注高考与中考，还关注中学数学解题研究与发展；不但继承了传统的教育教学思想，还在数学课改的浪头冲浪，与时俱进；与此同时，她与同类杂志相比有其特色：其一是其中许多文章是平淡中见新奇．例如2004年第5期有一篇题为《合作学习享受思维延伸美与创新美》所用的材料就是一个十分简单的三角恒等式的证明$\left(\text{求证}\ \dfrac{\cos x}{1-\sin x}=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$，而作者袁老师却让学生感受到"美"，享受到"美"．读来确实让人折服；其二是每期的"编后漫笔"是一个特殊的快餐，读后让人回味无穷，余音绕梁!

作为课堂要求师生互动，那么作为杂志，我认为要多与读者互动．让编辑与读者多交往，相互学习，相互促进，以图全国整体数学教育教学的提升，以期实现陈省身先生希望的中国要成为"二十一世纪的数学大国"!

同时，我们在一线教学的老师有许多教学的困惑，尤其是正值课改中，如果能开设一个"解惑"这样的栏目，并请有关专家评析与解答，我相信会更深受欢迎．

我自己也写了几篇教学文章投到《数学教学》，虽然没有被刊用，但都会在两个月内退回来，这又是其一大特色．每每收到退稿，我的心情是复杂的，一方面是激动，她不是散落文稿，认真对每一位热心的作者，让作者信赖，让作者安心．一方面是感激，它让我认识到自己的不足与差距，从而促使我更加努力地学习，同时也有一份淡淡的失落感．总之，这将默默地激励着我不断地前进，让我不断"充电"，把闲暇时间都放在钻研教育理论上，我要感谢她!

走近《数学教学》

313000 浙江省湖州市第一中学 黄加卫

毕业参加工作之后，投稿时首选是母校华东师大的《数学教学》杂志，但是开始的投稿均被退稿，这对自己是不小的打击．但这种打击伴随的是一种安慰，因为毕竟得到了退稿通知，这种免费退稿的形式在我国的数学教育类杂志中，除《数学教学》杂志外我至今还没有遇到过，这是对投稿者的极大的尊重和鼓励．很荣幸，本人的一篇论文终于在《数学教学》杂志2005年第2期上发表，并在其中领略到杂志编委严肃的学术风范，用稿通知——稿件专投认定——稿件发表时间——稿件校对——正式发表，莫不令人深受感动和教育．在其杂志中，先进的国内外数学教育理念的介绍、国内外各类重要数学教育会议的报告、别具一格的"编后漫笔"等栏目无不令人回味无穷．

最后提出几点建议：

1．对所投稿件每篇均回复的传统应加以保持，但处于工作量、经济上的考虑，不妨要求投稿者尽量使用电子邮箱投稿．

2．适当扩大杂志的容载量，如48页扩至64页，或版面扩至A4．

3．适当加大自身的宣传力度．

乐此不疲 倾情编辑

邹一心 忻重义

从文革后的1979年本刊正式复刊至今, 我俩长期先后担任常务副主编, 愉快又繁忙地伴随杂志度过了几多春秋.

可以想象, 编辑部的工作有的还很琐碎:

对初审、复审、终审通过的稿件, 发出采用通知, 并请作者确认非一稿两投, 对清样组织三校, 并同时寄原作者校对, 最后寄稿酬及赠阅杂志;

对未采用的稿件, 两个月内发出退稿通知并免费退还原稿;

对读者询问, 有问必答; 对稿件非取即退, 使篇篇文章有着落;

在同类杂志中, 较早实施电脑排版、电脑作图, 并开通E-mail, 迎接读者电脑赐稿.

……

有人说"编辑如做嫁衣", 我们却不以为然.

在"按照'面向世界、面向未来、面向现代化'的指示, 在中学数学教育领域内研究新问题, 交流各地经验, 为社会主义普教事业服务. 立足上海, 面向全国"的本刊办刊方针下, 我们尽力协助并配合主编精制如下三道菜: "招牌菜(人无我有)、花色菜(人有我优)、家常菜(人优我精)", 从中乐在有整台机器中的个人螺丝钉作用, 乐在有他人成果暖己心, 乐在生活于清水衙门(一概不收巧立名目的任何附加费)而坦然自得.

正因如此, 能化苦为甘, 乐做所谓"嫁衣"而乐此不彼.

值此《数学教学》五十周岁生日之际, 我们要衷心感谢广大读者对我们的长期支持与爱护, 渴望今后能继续加强"编读往来", 对我们工作中存在的问题和缺点能不吝指正.

(上接第7–15页)

联系, 怎样能证明$BC=B'C'$呢?"

……

"你们利用了假设没有? 假设是什么?"

"我们假定$AB/\!/A'B', AC/\!/A'C'$. 是的, 直到现在我们还没有利用这个假设."

"你们利用到全部的假设没有? 你们说$AB/\!/A'B', AC/\!/A'C'$. 难道这些线段只有这点关系吗?"

"没有; 从作图, AB还等于$A'B'$. 它们之间是彼此平行而且相等, AC和$A'C'$之间也是一样的."

"两条等长的平行线——这是一个很有趣的图形, 你们知道它吗?"

"知道的, 这是平行四边形, 让我们连接A与A', B与B', C与C'."

"这主意倒不坏, 在你们的图形里这时有几个平行四边形?"

"有两个是立刻可证明为平行四边形的, 此外还有一个好象是平行四边形, 我们希望能够证明它, 如果能办到的话, 这时BC和$B'C'$是这平行四边形的对边, 当然相等."

经过教师的启发使得学生一步一步地进行思考, 一直到他们能想到$BCC'B'$是平行四边形为止, 解决这问题的设计阶段算是完成了. 以下的实施阶段是比较容易完成的, 只要把设计过程详细写出来就成了. 从上例的一段对话, 我们不难看出教师是如何地帮助学生进行思维活动, 说得更具体一点, 是如何地帮助学生分析问题. 学生经过这样的训练, 就会培养他们的解题能力, 这正是数学教学所要达到的目的.

编者按 孙泽瀛先生(1911-1981)是我国著名的数学家和数学教育家. 1932年毕业于浙江大学, 后赴日本帝国大学研究生院深造, 主修微分几何. 1937年回国, 先后在山东大学、浙江大学、四川大学、重庆大学任教. 1947年由著名数学家陈省身的关心, 他在美国印第安那大学获得博士学位. 1949年新中国诞生, 孙泽瀛先生又回到祖国. 1951年受命筹建华东师范大学数学系, 并担任系主任. 直到1958年, 去江西大学主持建立了江西大学数学系, 并在那里工作到生命的最后一息. 在华东师大数学系担任系主任期间, 孙泽瀛先生不但为数学系建立了最早的课程体系, 还特别关注中小学的数学教育, 创办了《数学教学》, 并担任《数学教学》杂志的第一任主编. 本文是孙泽瀛先生在《数学教学》创刊号(1955年第1期)上为中学教师撰写的一篇文章, 今天我们重读五十年前的这篇文章, 仍能深切感受到老一辈数学家、教育家对基础教育的细致入微的关爱.

中学数学教师如何对学生进行启发

孙泽瀛

中学数学教学的主要目的是给学生以数学的基础知识, 并且培养他们应用这种知识来解决各种实际问题所必需的技能. 为了这项目的, 就得训练学生的独立工作能力. 说得更具体一些, 就是训练他们如何独立地进行思考去解决问题. 要想做好这件工作, 要依靠教师如何去帮助学生. 帮助太多，任何问题都给学生解决了, 那么, 学生就会闲得不去进行思考, 教学的目的就不能达到; 帮助太少, 学生就会感到无从着手, 因此就望而生畏, 退缩不前了. 怎样才算是恰到好处的帮助呢? 这就是本文所要讨论的问题.

教师在把数学的基础知识传授给学生后, 就必须帮助他们牢固地掌握这些知识, 灵活地运用这些知识. 要达到这项目的, 教师的帮助要富于启发性. 怎样才是启发性的帮助呢? 这就要教师设身处地站在学生的立场, 了解学生的情况, 懂得他们正在进行的思维过程, 逐步地诱导而不是越俎代庖地替他们进行思维. 这正像教小孩子初学走路一样要带着走, 不可以抱着走, 才可以培养出小孩子的走路本领. 因此, 所谓启发性的帮助, 简单说来, 就是结合学生的脑力劳动进行有含蓄的, 有目标的帮助.

启发性的帮助主要是靠提问方式来进行, 因此, 要达到有含蓄的、有目标的帮助, 就得在提问中表现出这两种精神. 那么, 所谓有含蓄的、有目标的提问又是怎样的呢?

含蓄的提问指的是提问内容的一般性与提问词句的简明性. 例如问"未知的东西是什么?""条件是什么?""你能不能找出一个与本问题有关的问题?" 等等, 这些提问的词句简单明了; 同时, 这些提问的内容非常广泛概括, 在解决任何问题时都可以应用到. 与这相反的, 例如问"你能不能应用勾股定理?" 语句虽然也简明, 可是它仅能应用于某种特殊问题, 这就失去了一般性而不成为有含蓄的提问了. 为了说明含蓄性的提问的好处, 那么, 就让我们来看看没有含蓄性的提问有什么坏处.

仍旧拿"你能不能应用勾股定理?" 这一提问作为例子吧! 当教师这样地提问时, 他的用意是好的, 亟欲替学生解决问题. 可是这一帮助是太多了, 有以下几点的坏处:

(1) 如果一个学生已快接近于问题的解决了, 他当然明白这一提问所包含的启示意义, 可是他已不需要这项帮助了. 反之, 一个学生离开问题的解决还远得很的时候, 他就很可能完

全不明白这一提问的作用. 因此这一提问并不能帮助那些急需帮助的学生.

(2) 如果这一提问的启示意义是被了解了, 那么, 它把所有的秘密都显露出来, 留给学生要做的事就太少了.

(3) 这一提问的启示意义太狭隘, 就算学生能利用它来解决目前的问题, 可是对于解决以后的问题, 他是毫无所得, 这样的提问失掉了训练的作用.

(4) 就算学生懂得这提问的作用, 可是他很难体会到教师凭什么会想到它的. 学生本人怎样才能够独立地想到它的. 看起来这提问太不自然了, 就好象变魔术似的突然就提出, 这样进行当然也就失掉训练的作用.

下面让我们谈到有目标的提问, 什么目标? 那就是达到使学生能独立地解决问题的目标. 要达到这项目标, 首先就得对解决问题的步骤进行分析, 看看必须具备那些步骤才可以训练学生独立地解决问题的能力. 一般讲来, 解决问题有四个主要的步骤, 那就是"了解"、"设计"、"实施"、"讨论", 分别说明如下:

(一) 所谓"了解", 那就是彻底地明了问题的涵义, 不懂得问题的意义就进行解答, 这是最愚蠢的事. 不理会问题的要求就进行工作, 这是最鲁莽的事. 像这样的事, 是经常地发现的; 因此, 教师就有责任纠正这些行动, 主要的方式是通过提问的方式来纠正.

首先, 问题中的词句, 学生要搞清楚. 然后要能指出问题中的主要部分: 什么是未知的或所求的? 什么是已知的或假设的? 什么是条件? 学生必须很清楚地掌握这些问题中的主要部分. 如果需要作图的话, 他就得画一个图, 在图上指明哪些是未知的, 哪些是已知的. 在必要时, 还得用记号分别地注明这些部分. 除去上面三种提问能帮助学生掌握问题中的主要部分外, 还有一种提问有时也很起作用, 那就是: 条件是否充分?

为了具体地说明上述的提问如何进行, 让我们举出一个简单的问题为例: 已知长方体的长度、宽度与高度, 试求长方体对角线的长.

为了使得学生彻底明了这问题的意义, 教师的提问与学生的回答应如下面所进行:

什么是未知的?

长方体对角线的长.

什么是已知的?

长方体的长度、宽度与高度.

利用适当的记号来标明这些已知量与未知量. 例如说用a、b、c分别表示长方体的长、宽、高; 用x表示未知量; 那么x与a、b、c间的条件如何?

一个长方体, 它的长、宽、高分别为a、b、c, 这时它的对角线之长为x.

这个问题是不是可解的? 那也就是说: 来决定未知量, 我们的条件是否充分?

是充分的. 因为晓得了a、b、c, 就可决定这个长方体; 长方体决定了, 它的对角线也就决定了.

(二) 设计或称为分析, 是解决一个问题的中心工作, 问题之能否解决, 就看设计是否成功. 这一步工作有时是烦难的, 可是思维的训练也主要地就在这一步. 我们说对于一个问题的解决无从着手, 就是指找不到一个解决的计划, 学生最需要帮助的也就是这一步工作. 要想有效地帮助学生培养设计的能力, 教师就得设身处地想一想, 假使他本人是一个学生, 凭他的经验, 如何克服问题的难点而达到解决的愿望.

当然, 如果基础知识欠缺的话, 我们就得不出解决问题的好方案, 如果基础知识完全没有的话, 那么就根本无从解决问题. 解决问题的好方案是根据以往的经验以及所获得的知识而得到的. 但是仅凭记忆罗列出许多以往的经验与知识而不加以适当地选择, 这等于摆一个杂货摊仍无补于问题的解决. 造房子得要材料, 但是有了材料而不选择那些能配合需要的, 房子仍旧造不起来的. 解决数学问题的材料是我们以前所获得的数学知识, 例如已经证明过的定理, 已经作过的练习题等等. 为了要学生知道选择哪些需要的材料, 教师就可以这样地进行启发性的提问: 你们能不能找出一个与本

问题有关的问题.

感到困难的是在一般情况下有关的问题可有许多, 那么, 怎样在许多有关的问题中选出一个或几个对于本问题的解决确实是起作用的. 因此, 在这种情况下, 教师更应作如次的启发: 你们已经知道什么是要求的对象, 现在你们能不能想出一个熟悉的问题含有同样或相似的要求对象?

如果这时能找出一个已熟悉的问题和现在的问题密切有关, 那是再好没有了. 现在就要向学生提示是否能利用这相关的问题, 因此我们还要问: 这就是你们所熟悉而且与本问题有关的问题, 你们能利用它吗?

如果不幸, 上面的提问还不能启发学生解决问题. 这情况的发生或许由于的确找不出一个直接有关的问题, 教师得更进一步启发. 这时他可以提问: 你们能找出一个比现在的问题更一般化的问题吗? 或者更特殊化的问题吗? 如果去掉一部分的已知条件, 所求的对象是如何变动的?

经过上面的提问, 原来的问题已经转换了面貌, 这等于说转换成为新的问题了. 对于这新问题也许是学生以前所知道的, 当然用不着另外解决; 否则, 还得要学生解决这新问题. 因此, 这时要提问: 你们既然无法解决原来的问题, 现在有法解决这有关的新问题吗?

遇到一种较繁难的问题, 有时得经过好几次的转换与变形. 为了使得学生不要因此而转移了目标, 所以还得趁机拉回到本题, 这时我们可以问: 你们利用了所有的已知对象吗? 利用了所有的条件吗?

让我们仍旧用前面那个简单的问题为例来说明! 当学生彻底了解问题之后, 如果教师注意到他们对问题的解决无从着手, 这时就要进行启发性的帮助了. 下面用······表示对提问答不出时学生的沉默.

“你们能找出一个与此有关的问题吗?”

······

“你们已经知道什么是要求的对象, 现在你们能不能想出一个熟悉的问题含有同样的要求对象呢?”

······

“好吧, 什么是要求的对象呢?”

“长方体的对角线.”

“你们晓得一个问题含有同样的要求对象吗?”

“不晓得, 我们还没有学过任何关于长方体对角线的问题.”

“你们晓得一个问题含有相似的要求对象吗?”

······

“你们总知道对角线是一个线段, 难道你们就没有学过未知量是一个线段的问题吗?”

“啊! 晓得的, 我们曾经解决过那一类的问题, 例如求直角三角形的一条边.”

“好! 这就是你们所熟悉而且与本问题有关的问题, 你们能利用它吗?”

······

“你们已经找到一个与本问题有关的问题, 你们不想法利用它吗? 引进补助线试试看, 可不可以利用?”

······

“大家注意, 你们所知道的有关问题是与三角形有关的, 现在在你们的图形里有什么三角形吗?”

当然我们希望这一提示足够帮助学生在他们的图上找出一个直角三角形出来, 使要求的对角线刚巧是直角三角形的弦. 可是教师还要防到最坏的情况, 那就是学生在上述的启发中, 还没有想到解决问题的方案. 这时他得进行更显明的启发.

“现在要引一条补助线使得你们的图里面含有一个直角三角形, 你们会引吗?”

“你们所要求的是长方体的对角线, 现在在图里面得出的直角三角形和所求的对角线有什么联系呢?”

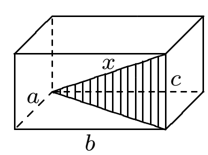


图 1

根据学生的实际情况, 这样或多或少的启发帮助了学生想出一个解决问题的方案. 他们晓得所引进的补助图形就是那个直角三角形, 直角三角形的弦就是所求的长方体的对角线 (图 1), 如果学生从这里就晓得全部问题的解决, 那就是说: 他们的设计过程是完成了. 以后就要进行实施阶段了. 否则, 教师还要花点时间去启发.

"你们已经晓得: 要求长方体的对角线, 就得求直角三角形的弦, 这条弦怎样求呢?"

"利用勾股定理来计算它."

"不错, 如果晓得了两条直角边就可以求出弦, 但是现在的直角边是什么呢?"

"一条直角边是已知的, 那就是c. 另一条直角边据我想, 是可以求出来的, 啊! 对了, 另一条直角边是另一直角三角形的弦."

"好极了! 你们现在完成了设计步骤."

(三) 实施是把上面设计过程的步骤细致地写出来, 这一步工作要比设计工作容易得多, 在进行中要细心. 如果学生把设计工作完全掌握了, 这时他们可以不需要教师帮助, 不过还要防到学生把他们所设计的思维过程忘记了. 这种情况一般发现在学生的设计没有经过自己的独立工作而是由教师片面地把计划定出了. 因此在设计过程中, 教师的帮助一定要有分寸, 否则就会剥夺了学生的独立思考, 而发生上述忘记设计步骤的情况. 为了使学生确实相信他们所设计的思路不错, 教师还得要求学生复查他所实施的每一步骤. 这时他可以提问: 你们能够看出这一步是正确的吗?" 或者当教师对学生的了解程度尚有疑虑时, 他更可以加重地提出: 你们能证明这一步是正确的吗?

让我们仍旧继续前面的例吧! 学生在设计过程中得出了解决问题的方案, 他们看出一个直角三角形, 它的弦就是所求的未知量x, 它的一条直角边就是已知的高c, 另一条直角边是底面的对角线. 为了方便起见, 学生会想到用字母y来表示另一条的直角边, 那就是分别以a、b为边的底面的对角线. 从这里他们看出原问题转移到一个新问题了, 在这新问题里的未知量是y. 最后, 从一个直角三角形考虑到另一直角三角形, 他们得到$x^2=y^2+c^2$, $y^2=a^2+b^2$.

因此, 将作为补助用的未知量y约去后, 就有$x^2=a^2+b^2+c^2$, $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

在学生这一系列的进行中, 教师不必去打搅他们, 但有时得要求他们复查每一步骤是否正确. 例如问: "你们能确实地看出来以x、y、c为边的三角形是一个直角三角形吗?"

对于这一提问, 学生可能很老实地回答说"是的". 如果教师发觉学生还有些犹豫时, 他得追问: "你们能证明这个三角形是直角三角形吗?" 当然在进行最后一个提问时, 学生应该先有一些立体几何的知识.

(四) 讨论阶段是解题的最后一个步骤, 它是为了巩固已得的成果, 为了发展学生的联系能力, 当学生完成了设计, 制订了方案, 写出了步骤, 得出了解答, 似乎以下就没有事情可做了. 但是一个好的教师还得使学生巩固他们所获得的成果, 利用他们所获得的成果, 发展他们所获得成果. 这些要求固然可以通过作业来完成, 但是在解题之后, 即时地由教师启发, 来进行推论, 更觉亲切, 而且容易收到效果. 这时教师可以进行如此的提问: 在结果里你们能看出什么? 你们能不能利用其他的方法得出这同样的结果呢? 你们能利用所得的结果吗? 你们能利用现在所采取的解题方法来解决其他的问题吗?

仍旧采用前面一贯的例, 学生可以得出了一个关于长方体的对角线的公式

$$x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

"从这个公式里, 你们能看到什么? 假如a、b、c两两交换, 这公式改变吗? 假如a、b、c内有一个等于0, 这公式变成了什么? 假如长方体的长、宽、高以同样的比例增加, 它的对角线的长怎样变呢?

"你们能不能利用其他的方法得出这同样的结果呢? 如果从原图形里不用前面的办法找出直角三角形而找出另外的图形作为补助图形, 去求长方体的对角线之长, 你们看看是

可能的吗?"

通过这样的启发, 学生也许能看出在原图形里包含一个矩形, 那条要求的对角线刚好是这矩形的对角线, 因此问题就转变为求矩形对角线的问题了. 这就让学生晓得除前面所说的方法外, 还有另外的方法可以解决问题. 这样丰富了学生的观察能力与联系能力.

"你们能利用所得的结果吗? 你们能利用现在所采取的解题方法来解决其他的问题吗?"

例如有一个平顶的建筑物, 顶是一个矩形, 长为16公尺, 宽为10公尺. 在中心立一根旗杆长6公尺, 为了支持这根旗杆, 在顶点下1公尺的地方用四条等长的铁缆分别系在屋顶的四角, 问每条铁缆长几何? 学生可以利用前题的结果, 设想有一个长方体, 8公尺长, 5公尺宽, 5公尺高; 那么以$a=8$, $b=5$, $c=5$代进所得的公式里, 就求得缆长$x=\sqrt{114}$公尺. 或者还可以利用前题的方法, 设想在屋顶上有一个竖立的直角三角形, 缆长刚巧是这个直角三角形的弦.

这种提问既可以使学生巩固他们所学得的方法与结果, 而且还可以使数学问题和实际应用结合起来, 通过这样的训练去培养他们联系实际的能力.

以上已经把解决问题的四个主要步骤以及在进行的过程中如何启发作了一个概括的叙述. 以下再举两个例子来说明它.

例1 在已知三角形内作一个正方形, 它有两个顶点在三角形的底边上, 其他两个顶点分别在三角形的另外两条边上.

"什么是未知的(或所求的)?"

"一个正方形".

"什么是已知的?"

"一个已知的三角形, 此外没有别的了".

"条件是什么?"

"正方形的四个顶点必须在三角形的三边上, 两个顶点在底边上, 另外两个顶点分别在其他两边上."

"你们想想, 要作一个正方形满足这些条件, 有没有可能?"

"我想是可能的, 但不敢确定."

"这样, 这题目对于你们不是马上就可以解决的了. 如果你们不能解决这个问题, 试试看先解决有关的问题. 你们能作一正方形满足一部分的条件吗?"

"什么叫一部分的条件?"

"我们的条件是关于正方形的顶点的. 正方形有几个顶点?"

"四个".

"所谓部分的条件指的是少于四个顶点, 例如说三个或两个顶点所满足的条件. 在原条件内去掉一部分条件, 也就是说条件放宽一点, 这样是不是容易作图?"

"这样是容易一些, 我们可以作一个正方形, 它的两个顶点在三角形的边上——或者三个顶点在三角形的边上."

"把图作出来!" 学生作图2.

"你们这个图是在条件放宽的情况下作出来的. 所求的图形是不是确定了呢?"

"如果只有三个顶点在三角形的边上, 这个

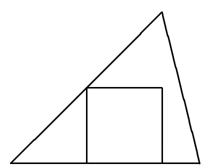


图 2

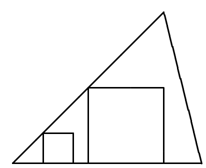


图 3

正方形不能确定."

"好! 再作一个图来说明你们的意思."

学生作图3.

"你们说过在条件放宽的情况下, 正方形不能确定, 那么它是怎样地变化呢?"

……

"正方形的三个顶点在三角形的边上, 第四顶点本来应该照原来条件所规定的也在三角形的边上; 而此时并不在边上, 照你们所讲的, 这正方形不能确定, 也就是说它可以变化, 第四顶点当然也跟着变化, 这第四个顶点怎样地变化呢?"

……

"你们多画几个正方形试试看, 这些正方形有三个顶点在三角形的边上, 正好象你们上面

所画的一样. 你们想想看这时第四顶点所成的轨迹应当怎样?"

经过这一连串的启发, 使得学生非常接近于问题的解决了. 如果他们能看出这轨迹是一条直线, 那么, 问题算是完全解决了, 解题的设计过程也就完成了.

例2 有不在同一平面内的两个角, 它们的对应夹边分别平行而且同向, 证明这两个角相等.

"假设是什么?"

"不在同一平面内的两个角, 它们的对应边互相平行而且同向."

"结论是什么?"

"两个角相等."

"画一个图, 引进适当的符号."

学生作图4.

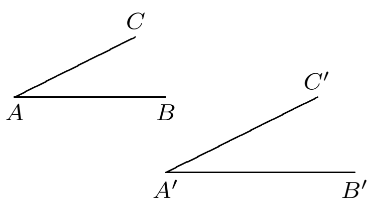


图 4

"现在利用你们所引进的符号再说一遍: 假设是什么?"

"A、B、C 和 A'、B'、C' 不在同一平面内. $AB /\!/ A'B'$, $AC /\!/ A'C'$ 而且 AB 和 $A'B'$, AC 和 $A'C'$ 是同向的."

"结论呢?"

"$\angle BAC = \angle B'A'C'$."

"你们想想看, 以前学过的定理中有没有同样结论的呢?"

"如两个三角形重合, 它们的对应角相等."

"很好! 你们晓得了一个与本问题有关的定理, 你们能利用它吗?"

"还想不到怎样去利用."

"你们不会画上补助线使它可以被利用吗?"

……

"你们刚才所提到的定理是关于两个重合的三角形, 在你们的图上有三角形吗?"

"没有, 但是我们可以引出三角形, 连接 B、C 和 B'、C', 就得出两个三角形, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$."

"好极了, 但是引出这些三角形是为了什么?"

"为了证明结论, $\angle BAC = \angle B'A'C'$."

"好! 你们要证明这两个角相等, 需要哪一类的三角形?"

"重合的三角形. 是的, 我们可以选择 B、C 和 B'、C', 使得 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ (如图5)."

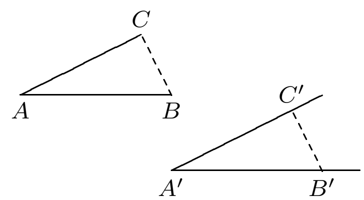


图 5

"很好! 现在你们想要证明什么?"

"要证明 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 如果这件事能够证明, 那么, 结论 $\angle BAC = \angle B'A'C'$ 马上就得出了."

"对! 你们现在有了新的目标, 这目标是指着新的结论. 想想看, 你们学过的定理中有没有同样的结论呢?"

"当两个三角形的三边对应相等时, 它们就重合."

"很好, 你们现在有了一个熟悉的定理对于证明目前的结论是有关的, 你们能利用它吗?"

"如果晓得了 $BC = B'C'$ 就可以利用它."

"对! 现在你们想做什么?"

"要证明 $BC = B'C'$."

"想想看, 有没有什么熟悉的定理含有相同结论的呢?"

"平行四边形的对边彼此相等, 但是看不出来怎样去利用它."

"你们不会引进一些补助线使得它可以被利用吗?"

……

"你们看, 在图形里如果 BC 和 $B'C'$ 没有

(下转第7-9页)

正确认识变换在几何教学中的作用

——对华东师大版初中数学教材变换内容编排的认识

200032 上海市徐汇区教师进修学院 李 宏

全日制义务教育数学新课程强调了图形与变换的内容, 突出了变换在图形认识过程中的作用. 事实上, 几何变换思想促进了几何学的发展, 强化变换有助于改进几何教学, 变换思想利于学生创新意识的形成. 华东师范大学出版社出版的初中数学教材突出变换地位, 强化变换的工具作用的处理方式, 较好地落实了数学新课程的要求, 并体现了教材编写的特色, 在此谈谈个人的理解与体会.

一、教材中几何变换内容的处理

1. 独立成章, 自成一体

图形与变换的内容主要包括图形的轴对称、图形的平移、图形的旋转和图形的相似. 轴对称变换、平移变换和旋转变换是保持两点间距离不变的变换, 都是合同变换和保距变换, 这种变换不改变图形的大小和形状. 相似变换改变图形的大小, 但不改变图形的形状. 数学新课程要求"让学生借助图形的直观探索轴对称、平移、旋转和图形相似的基本性质".

华东师大版数学教材很好地落实了数学新课程的要求, 把四种变换按照学生接受的难易程度, 分为三章内容逐步展开. 第9章介绍轴对称, 第11章介绍平移与旋转, 第18章介绍图形的相似. 这几章内容分别在七年级下、八年级上和八年级下. 这种独立成章的编排一方面使内容相对完整, 便于学生的学习; 另一方面也要求教师在教学实践中对变换内容要给予足够的重视.

独立成章地编排变换内容, 并不是要求介绍严密的变换定义, 然后从定义出发来研究变换的性质, 形成严密的关于变换的知识体系. 华东师大版数学教材对每章变换内容的处理是不追求知识体系的严密性, 而是让学生通过实例认识变换, 理解变换的性质并能运用变换解决问题. 如轴对称一章, 从生活中的轴对称入手, 让学生初步认识轴对称, 然后介绍简单的轴对称图形、画图形的对称轴、画轴对称图形等等, 使学生对轴对称的认识逐步深入.

2. 结合图形, 理解变换

教材不是为了介绍几何变换而讲变换, 而是强调变换作为图形认识的工具. 这种思想在教材中主要从两个方面体现, 一是从实例出发结合实验操作引入几何变换的概念, 让学生的思维从静态的图形转向动态的变化, 如旋转变换, 先从日常生活中的实例, 从单摆的摆动出发, 使学生对旋转有一个初步的形象, 然后通过"试一试"让学生进行操作, 发现旋转的特征. 教材的这种做法旨在让学生体会用运动变化的观点或思想观察和分析周围的事物, 并逐步内化为学生认识事物和解决问题的方法.

另外一方面的体现是每一种变换都以某一种图形作为载体来研究, 也就是说利用变换的特征来探索或研究一些图形的性质. 如在教材中第9章直接把轴对称和等腰三角形结合起来, 等腰三角形的特征是利用轴对称的特征探索出来. 再如教材在第11章介绍平移与旋转以后, 在第12章就讲平行四边形, 而平行四边形的特征就是利用平移和旋转的特征来得到, 教材中先通过让学生操作, 认识到平行四边形是中心对称图形, 然后利用中心对称图形的特征, 得到平行四边形的对边相等、对角线相互平分等特征.

这种结合图形来研究某种几何变换的方式强化了变换的作用, 同时比较具体, 学生比较

容易理解; 反过来, 学生对相应的图形认识也比较深刻, 从静态的理解到动态的认识.

3. 联系实际, 拓宽应用

华东师大版教材处理变换内容的特点还体现在让学生利用变换进行图案设计方面. 如教材中轴对称一章中设置了设计轴对称图案一节内容, 让学生认识到商标、衣料图案和众多日用品上的美丽图案中有许多轴对称图形, 并介绍了利用轴对称设计图案的方法. 再如平移与旋转这一章中阅读材料中介绍了古代建筑中的旋转对称图案, 并在习题中介绍了通过平移构成的美丽图案等. 在图形相似这一章中, 教材提供了关于"分形"的阅读材料, 使学生了解雪花曲线, 从而认识自相似图形.

利用变换设计图案是十分有趣的实践活动, 让学生自己动手设计和创造优美的图案, 不仅能熟悉各种变换的特征, 而且可以更好地发挥学生的主动性和创造性, 改变学几何就是做证明题的状况. 在这样的活动中, 学生真切地感受图形变换的乐趣和价值, 激发出学好变换、用好变换的积极性和创造性, 同时, 也增强了学好几何的自信心.

二、值得深入探讨的问题

这种利用变换来处理几何内容的方法, 打破了传统初中数学教材几何部分用公理化思想一统天下的局面, 使几何教学改革有所突破. 但在目前的教学实践中所产生的问题, 必须引起我们高度的重视, 并要在实践中加以解决.

1. 与传统教材的衔接问题

课程改革是综合性很强的改革, 步子太大, 不容易让大多数人接受, 改革常常失败; 而步子太小, 又体现不出改革的力度, 达不到改革的效果. 用变换的思想来处理几何内容, 可以说是在传统教材的基础上迈出了一大步. 但受习惯思维的影响, 从目前的实际情况看, 不少人并不接受这种改变. 有的人认为它忽视了数学的逻辑体系, 削弱了基础知识和基本技能等等; 还有的教师不按教材的编写, 随意更改内容的前后顺序, 仍按传统的处理方式来进行教学.

因此, 为使改革在健康和可持续的轨道上进行, 找到和传统教材处理的结合点, 使人们能接受并逐步适应这种变化是当务之急.

2. 如何把握变换运用的度

教材中对于变换思想的处理, 一方面是让学生掌握这种思想方法, 另一方面是用它来解决问题. 有些内容用变换处理恰到好处, 如对于等腰三角形的底角相等的探索. 有些内容用变换处理操作起来却很复杂, 如用变换来得到两组对边分别相等的四边形是平行四边形这一结论, 将非常麻烦. 而用传统的三角形全等的方法来处理, 则非常简单. 因此, 如何把握变换运用的度, 很值得我们进行深层次的思考.

另外, 用变换处理还存在着语言表达问题. 因考虑到学生的接受程度, 各种变换并没有给出明确的概念, 而是采用一种描述性的说法, 各种变换性质的得到也是用一种简单说理的方式给出. 这样造成的问题是表述不清或表述过于繁琐, 学生不能接受或难以接受.

清楚界定变换运用的范围和引进一些精练规范的语言来描述各种变换的操作过程, 将有助于变换内容的学习.

3. 例题、练习题和习题的设置

初一、初二的教材中有许多图形的属性是运用图形的变换进行推导的, 而在例题、练习题和习题中则用所获得的图形的属性进行严密的推理. 并没有要求学生用变换的语言解答问题, 也就是说图形变换的操作性描述仅反映在教材正文的叙述中, 这样的做法有利于逻辑推理思想的培养, 也便于教师的教, 学生的学. 然而, 这样的做法也可能会给学生造成错觉, 认为变换思想仅仅是用来推导书本上结论, 平时做题时不需要用, 也不必用.

因此, 要使学生真正能把变换作为一种有力的工具, 还应考虑配置一定数量的能让学生自己探索并寻找结论的题目, 使变换的思想内化为一种重要的思考问题的方法.

4. 教师的培训问题

教师是课程改革成功的关键. 一个新的思

(下转第7-2页)

对概率教学的几点思考

712000 陕西省咸阳市风轮中学 王柱元

现行的高中数学教材中增加了不少对教师来说从未教过的内容. 概率就是其中之一, 尽管大多数高中数学教师在大学都学过《概率论》, 但并不意味着能较深刻地掌握高中所涉及的内容. 因此笔者联系自己的教学实际写下本文.

一、事件的分类和概率的定义

对于纷繁的自然现象和社会现象, 从结果能否确定的角度分两大类: 确定事件和不确定事件. 确定事件包含必然事件和不可能事件, 不确定事件如果存在统计规律性即为随机事件. 必然事件和不可能事件不管在事件发生前还是发生后其结果都是确定的. 随机事件是在事件未发生前对事件结果无法预知.

一个随机事件的发生既有随机性(对单次试验而言), 又存在着统计规律(对大量重复试验而言), 从哲学的观点讲, 这是偶然性与必然性的对立统一. 在这里要注意强调大量重复试验这个前提. 在引入概率定义以后, 要注意强调概率是频率的稳定值, 因为这是中学生容易弄错的许多问题的根源. 例如可以这样问学生一个问题: 一个随机事件发生的概率为 $\frac{1}{10}$, 结果某人在一次试验中, 试验了100次, 结果发生了12次, 这可能吗? 再问学生, 这个人试验了100次是不是结果一定发生了10次呢? 在此可举例子: 我省某地区举办福利彩票发行现场会, 广告宣传中奖率为20%, 且一等奖数额很诱人. 一位农民看到现场不时传来中奖的喜讯, 于是做着发财梦去摸奖, 最后连家中的牛卖了也没中一次奖. 让学生讨论这个问题, 深刻理解"中奖率为20%"的含义, 引导学生用一种理性、平和、富有爱心的心态对待现实生活中的各种摇奖事情, 激发学生学习数学的兴趣, 提高他们解决实际问题的能力.

二、逆命题不能成立的几个命题

课本中指出随机事件 A 的概率的范围是 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, 必然事件的概率为1, 不可能事件的概率为0. 再提出这样一个问题: 一个随机事件 A 有 $P(A)=0$, 能否得出 A 为不可能事件? 对这个问题的解释应回到概率的定义上(定义本身也是求概率的基本方法). 概率为频率的稳定值, 因此 $P(A)=0$ 并不能得出"A 为不可能事件". 不可能事件指不管试验多少次, 每次结果事件 A 发生的频率都为0. 例如: 在直角坐标系 xOy 中, 点 C 的坐标为(2,0), A 为线段 OC 上一点(见图1), 则随机地在 OC 上选一点, 结果选中 A 点的概率为0, 但不能说明没有可能选中 A 的事件的发生. 同样, $P(A)=1$, 也不能得出 A 为必然事件. 事件 A 与 B 互斥, 则 $P(A\cdot B)=0$; 事件 A 与 B 为对立事件, 则 $P(A+B)=1$. 这些命题的逆命题也是不成立的.

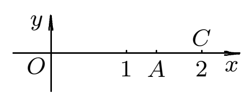


图 1

例题: 若随机事件 A、B 发生的概率均不等于0, 且 $P(A+B)=P(A)+P(B)$, 则事件 A、B 的关系为 ……………………………………( )

(A) A 与 B 是互斥的;

(B) A 与 B 是不互斥的;

(C) A 与 B 是独立的;

(D) A 与 B 是不独立的.

分析: 对任意的事件 A、B, 总有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$; 由条件知 $P(A+B)=P(A)+P(B)$, 所以 $P(A\cdot B)=0$, 又因为 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 所以 $P(A\cdot B)\neq$

$P(A)\cdot P(B)$, 因此答案为(D). 此题不能依据 $P(A\cdot B)=0$, 得出 A 与 B 互斥.

三、不同条件下求事件的概率

课本上只对互斥事件 A 与 B, 有一个公式 $P(A+B)=P(A)+P(B)$, 对相互独立的事件 A 与 B, 有一个公式 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. 这样的前提条件的限制会让学生的思路变得很窄, 解决综合性问题的范围缩小. 实际上教师在教完后应作拓展, 可以这样去做:

设事件 A 与 B 互斥, "$A+B$"含义为事件 A 发生或事件 B 发生; "$A\cdot B$" 含义为事件 A 与事件 B 都发生. 用韦恩图(如图2)解释, 学生不难得出 $P(A+B)=P(A)+P(B)$; $P(A\cdot B)=0$ 这样的结论.

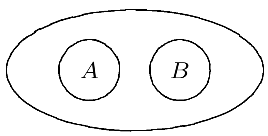


图 2

再设事件 A 与 B 相互独立, 则有 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. 此时学生不难得出

$$
\begin{aligned}
&P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)\\
&=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\\
&=P(A)+P(B)(1-P(A))\\
&=1-P(\overline{A})+P(B)(\overline{A})\\
&=1-P(\overline{A})P(\overline{B}).
\end{aligned}
$$

进一步还可以鼓励学生再分析 $\overline{A}\cdot\overline{B}$、$A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B$ 等事件在 A、B 互斥或相互独立的情况下的概率. 总结如下表:

概率	当 A、B 互斥时	当 A、B 相互独立时
$P(A+B)$	$P(A)+P(B)$	$1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$
$P(A\cdot B)$	0	$P(A)\cdot P(B)$
$P(\overline{A}\cdot\overline{B})$	$1-(P(A)+P(B))$	$P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$
$P(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B)$	$P(A)+P(B)$	$P(A)\cdot P(\overline{B})+$ $P(\overline{A})\cdot P(B)$

四、互斥事件与相互独立事件的关系

1. 互斥事件与相互独立事件的相同点和不同点

相同点为都是描述两个事件的关系. 不同点有两个, 一是从定义出发, 二者针对问题的角度不同, 一个针对能不能同时发生, 另一个是针对有没有影响. 二是从试验的次数来区别, 互斥事件是就一次试验下出现的不同事件, 相互独立事件是就两次或多次不同试验下出现的不同事件.

2. 互斥事件与相互独立事件的联系

"互斥"的两事件可以是相互独立的, "相互独立"的两个事件也可以是互斥的. 例如:一个盒子中放有3只红球2只黑球, 现从中任取一球. 事件 A: 摸出的是红球; 事件 B: 摸出的是黑球. 显然 A 与 B 不能同时发生, 即 A 与 B 互斥, 而此时 A 与 B 也是相互独立的(注意必然事件、不可能事件与任何事件都是相互独立的, 这点用相互独立事件的定义很容易理解).

现在有这样的一个结论: 当 A、B 都不是不可能事件时, 事件 A 和 B 为互斥事件, 则事件 A 与 B 一定不是相互独立事件(因为 A 发生 B 就不能发生, A 对 B 的发生有影响); 事件 A 和 B 为相互独立事件, 则事件 A 与 B 一定不是互斥事件(因为 A 和 B 无影响, 所以 A 和 B 可以同时发生). 当 A、B 至少有一个是不可能事件时, 事件 A 和 B 为互斥事件, 则事件 A 与 B 一定是相互独立事件; 事件 A 和 B 为相互独立事件, 则事件 A 与 B 一定是互斥事件.

这个结论可以这样证明:

如果 A 为不可能事件, 那么 $P(A)=0$.

$\because\ P(A)+P(B)=P(B)$,

$1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$

$=1-[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]=P(B)$,

$\therefore\ P(A)+P(B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$.

可见, 当 A 为不可能事件时, 在互斥和独立不同的条件下结果恒相等.

如果事件 B 是不可能事件, 则同样可证.

如果事件 A 与 B 都不是不可能事件, 即 $P(A)>0$, $P(B)>0$, 那么 $1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\neq P(A)+P(B)$.

这就证明了若事件 A 和 B 为相互独立事件, 则事件 A 与 B 一定不是互斥事件; 若事件 A 和 B 为互斥事件, 则事件 A 与 B 一定不是相互独立事件.

其它类型的事件都可以同理去证明.

一个值得回味的填数问题

325600 浙江省乐清市第二中学(华东师范大学数学系教育硕士) 陈 素

317000 浙江省台州学院 朱卫平

"数学的发展一再证明了'问题是数学的心脏'".[1] 问题是数学的开始. 因此, 可以通过问题的解决来鼓励学生敢于探索与思考. 我们所引用的问题的开始可以是一个老问题, 也可以是在与别人的谈话中偶尔涉及到的一个想法, 或是刚刚被证实的一些理论. 这些问题犹如一个个"故事". 在解决的过程中故事也正向我们"娓娓道来".

下面是在一堂问题探究课中所涉及的六圆填数问题, 这是一个值得回味的数学问题. 这个问题看起来似曾相识, 但是否能用出点新意来呢? 我们在指导学生独立探索的过程中, 学生认为他们有所收获, 不少同学认为自己也能"创造数学", 数学并不是遥不可及的.

问题: 有没有可能把1、2、3、4、5、6这六个数字填在图1中的六个圆中, 使三角形每边上三个数字之和相等.

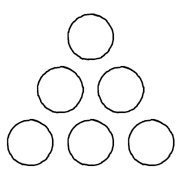


图 1

一、大胆的试验

这个六圆填数问题并没有现成的公式可以用, 学生的感觉是不知从何入手. 这时老师给予的应是鼓励和信心. 告诉学生: "大胆地根据直觉去尝试, 甚至不必担心所用的方法是不是数学方法." 对于一个问题刚开始我们所得出的往往只是猜测而已, 或许第一个猜测是不对的, 但这往往是问题的开始. 很快学生就会至少找到一个答案. 根据等边三角形的轴对称性可以得到另外五个答案. 但这五个答案实质是一样的. 比如图2、3中的答案是相同的.

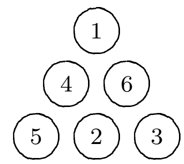


图 2

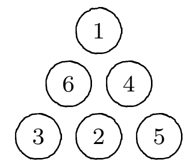


图 3

还有其他答案吗?

二、观察和猜测

教师引导学生进一步的思考: 观察已经得出的答案, 看看能否得到一些有用的信息. 学生不难发现以下事实:

(1) 顶点上的数字是1、3、5, 全部为奇数;

(2) 顶点上的数字与其对边中点上的数字的差相等. 如图2中$1-2=3-4=5-6$.

让学生做一些大胆的猜测.

(1) 如果把偶数放在顶点位置呢? 如图4, 探索得到:

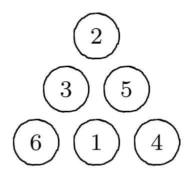


图 4

经检验每边之和等于11, 符合题意.

(2) 如果把最小, 最大的连续数分别放在顶点位置呢? 结合"顶点上的数字与其对边中点上的数字的差相等"的猜测可以得到如下结果(如图5、6):

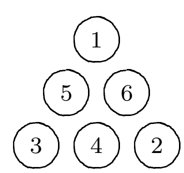


图 5

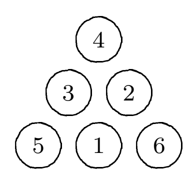


图 6

经检验每边之和分别等于9、12.

答案是否已经全部找到?

三、证明我们的结论

证明方法可以有不少, 以下是学生所想出的两种很不错的方法.

方法一:

估计每边上的最大和, 最小和.

首先应该知道三角形的每边之和是有限制的. 最大的和数是多少呢? 考虑有1的一边1只有和5、6在一起时达到最大, 为12. 因此12是我们能获得的最大和. 最小的和数是多少呢? 考虑有6的一边, 当然是和1、2在一起时最小, 为9. 因此, 每边之和在9到12之间.

若每边之和是9. 利用对称性, 若取了6, 另两个数字和为3, 这两个数字只能取1、2. 若取了5, 另两个数字之和为4, 则这两个数字只能取1、3(2、2)不可能. 因此, 只有3种可能组合: $6+2+1$, $5+3+1$, $4+3+2$. 剩下的问题是, 哪些数字放在三角形的顶点. 很简单, 就是重复出现两次的数字. 因此就得到每边之和为9的答案.

可以类似地得到其余情况的答案.

这是很好的方法, 关键是确定每边上的和在9到12之间.

方法二:

设每边之和是s, 如图7, 我们得到如下等式 $3s=(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+a)=(a+b+c+d+e+f)+(a+c+e)$.

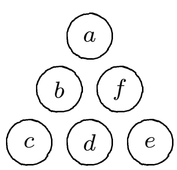


图 7

上式中第一个括号和为1、2、3、4、5、6的和, 为21, 第二个括号是三个顶点的和, 故

$3s=21+$三个顶点之和.

三个顶点和最小为$1+2+3=6$, 最大为$4+5+6=15$, 故

$27=21+6\leqslant 3s\leqslant 21+15=36$,

得$9\leqslant s\leqslant 12$.

若$s=9$, 顶点之和为6, 故顶点为1、2、3.

若$s=10$, 顶点之和为9, 故顶点为1、2、6; 1、3、5; 2、3、4.

若$s=11$, 顶点之和为12, 故顶点为1、5、6; 2、4、6; 3、4、5.

若$s=12$, 顶点之和为15, 故顶点为4、5、6.

当$s=9$、12时, 答案已经确定(如图5、6).

当$s=10$时, 可知1、2、6不可能在顶点, 否则每边之和不可能是10. 同样, 2、3、4也不可能在顶点, 否则每边之和不可能是10. 故顶点只能为1、3、5(如图2).

当$s=11$时, 可知顶点只能为2、4、6(如图4).

四、拓展

到此为止问题应该算是解决了, 但趁胜追击, 指导学生发散思考, 加以变形和拓展. 比如, 有没有可能把1到8这八个数字放在如图8所示的八个圆上, 使每边的三个数之和相等.

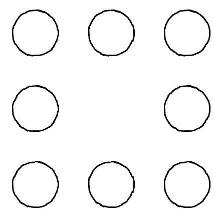


图 8

我们可以试着用解决问题的方法来解决它, 当然或许我们还可以找到其他更好的方法. 最终可以得到6种答案.

五、综合

六圆填数问题还可以推广、归纳吗? 比如怎样的6个数可以放在如图9所示的六个圆中使每边之和相等.

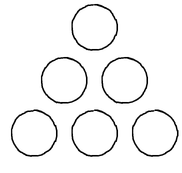


图 9

如果它能得到解决, 那么我们就能把1、2、3、4、5、6代入, 看是否符合结论. 六圆填数问题就是它的特殊情况了.

寻求"隐性"分类讨论的解题策略

312000 浙江省绍兴市长城中学 寿宝良

本文将需要分类讨论但又不能一目了然看出的问题称之为"隐性分类讨论问题", 解决这类问题的关键是寻求分类的标准.

数学中的某些概念有时往往是由分类定义给出的, 这容易确定分类标准; 但由参数值的"量变"而引起结果的"质变", 或者由图形的"突变" 而导致结果的"异变", 对那些隐含着分类, 却需要变中探秘的, 学生普遍感到无从入手. 本文从特征中感悟, 从分析中寻求, 转化后分类、分类后转化诸方面, 谈"隐性"的分类讨论问题的解题策略.

1. 从特征中感悟

以下一例, 粗看起来没有分类讨论的迹象, 但在解题步步深入时, 才感到分类讨论能使问题简捷, 此时要抓住特征, 寻求隐性分类标准的切入口.

例1 已知$a^2+b^2=1$, $b^2+c^2=2$, $c^2+a^2=2$, 则$ab+bc+ca$的最小值为 ………( )

(A) $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$; (B) $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$;

(C) $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$; (D) $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

评析: 由$a^2+b^2=1$, $b^2+c^2=2$, $c^2+a^2=2$, 得$a^2=b^2=\frac{1}{2}$, $c^2=\frac{3}{2}$, 则$ab+bc+ca=ab+c(a+b)$, 观察特征定分类标准a、b异号或a、b同号. 当a、b异号时, 此时$a+b=0$, $ab+bc+ca=ab+c(a+b)=-\frac{1}{2}$. 当$a$、$b$同号时, 此时$ab+bc+ca=ab+c(a+b)=\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}$.

综上所述$(ab+bc+ca)_{\min}=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

例2 不等式$(-2)^x a-3^{x-1}-(-2)^x<0$对于任意正整数$x$恒成立, 求实数$a$的取值范围.

本题的焦点是a的符号问题, 抓住特征, 寻找分类讨论的标准: 当x是正偶数或当x是正奇数时, 有以下解法:

(1) ∵ 当x是正偶数时, $a<\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$恒成立, ∴ a应小于函数$f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$在$x$取正偶数时的最小值.

∵ 函数$f(x)$在x为正偶数时为增函数,

∴ $f(x)\geqslant f(2)=\frac{7}{4}$. ∴ $a<\frac{7}{4}$.

(2) ∵ 当x是正奇数时, $a>1-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x$恒成立, ∴ a大于函数$g(x)=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^x+1$在$x$取正奇数时的最大值.

∵ 函数$g(x)$在x为正奇数时为减函数,

∴ $g(x)\leqslant g(1)=\frac{1}{2}$. ∴ $a>\frac{1}{2}$.

~~~~~~

我们怎样开始呢? 当然对学生而言6个连续的数字是不难想到的. 此外, 6个等距的数字, 比如5、8、11、14、17、20, 这可看作是1、2、3、4、5、6的变形, 或者更多.

而这些猜测又是新问题的开始. 如果猜测是对的话, 我们又可以得到一个结论. 如果不对的话, 我们会带着另一种运气去找一个反例. 但实际上, 我们往往会在找证明方法或找反例的过程中徘徊一段时间. 当我们一筹莫展的时候也要懂得放弃. 或许过一阵子, 当我们重新拾起这个问题的时候会豁然开朗!

参考文献

[1]张奠宙主编. 数学教育研究导引. 江苏教育出版社. 1998.
~~~~~~

综上, $a\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}\right)$.

2. 从分析中寻求

为寻求分类标准, 要对问题仔细分析逐步解剖.

例3　在如图1所示的坐标平面的可行域内(阴影部分且包括周界), 目标函数$z=x+ay$取得最小值的最优解有无数个, 则a的一个可能值为 ……………………………………………( )

(A) -3;　(B) 3;　(C) -1;　(D) 1.

评析: 本题是否要分类, 以什么标准分类, 都显得比较隐蔽. 目标函数$z=x+ay$化为$y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{z}{a}$, 当$a>0$, 即$-\dfrac{1}{a}<0$时, 由图1可知, z取最小值时的最优解不可能有无数个. 当$a<0$, 即$-\dfrac{1}{a}>0$时, 作直线$l:x+ay=0$, 把直线l移到直线AC位置时, 此时, $-\dfrac{1}{a}=k_{AC}=\dfrac{2-1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$, 即$a=-3$. 所以当$a=-3$时, z取最小值的最优解有无数个. 所以本题把$a>0$或$a<0$作为分类标准.

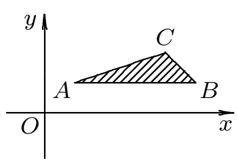


图 1

例4　已知$A(-15,5)$、$B(15,5)$两地相距30千米, 如图2(1)所示, 在它们之间铺设一条与y轴对称的管道, 由于地质条件不同, 在$y>0$地区, 铺设管道的费用为10^5元/千米, 在$y\leqslant 0$地区, 铺设管道的费用为6×10^4元千米, 求最经济的铺设路线.

评析:根据分析, 从以下两方面分类比较自然:

一是在A、B之间直接铺一条管道, 如图2(2). 因为在同一地质条件下, 两点之间直线管道距离最短, 因而费用最省, 其费用为$c=10^5\times30=3\times10^6$(元).

二是一部分管道铺设在$y>0$地区, 一部分管道铺设在$y=0$的地区, 因为在$y=0$的地区管道铺设费用低, 因此方案2的具体管道铺设如图2(3)所示, 问题归结为在x轴上找N点, 使管道铺设的总费用最省.

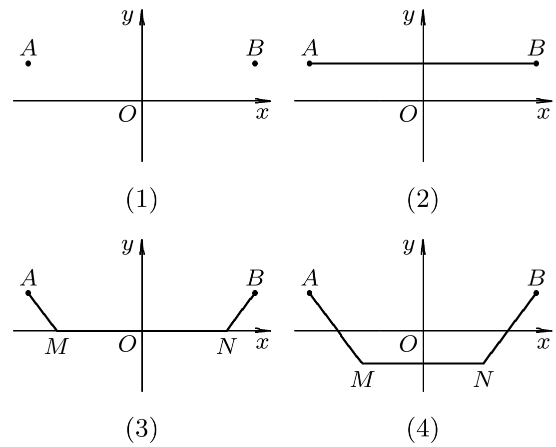


图 2

解: 设$|ON|=x$, 由平面几何知识可以证明图2(4)铺设的管道显然比图2(3)铺设的管道长, 且$y<0$地区与$y=0$地区地质条件相同, 因此按图2(3)铺设费用较省. 此时, 管道铺设的总费用$c(x)=2\cdot BN$段费用$+2\cdot ON$段费用. $BN=\sqrt{(15-x)^2+5^2}$, 故$c(x)=2\times10^5\times\sqrt{(15-x)^2+5^2}+12\times10^4x$, $x\in[0,15]$. 这样我们只要找出$c(x)$的最小值点, $c'(x)=2\times10^5\times\dfrac{x-15}{\sqrt{(15-x)^2+5^2}}+12\times10^4=2\times10^4\times\dfrac{10(x-15)+6\sqrt{(15-x)^2+5^2}}{\sqrt{(15-x)^2+5^2}}$, 令$c'(x)=0$, 解得$x=\dfrac{45}{4}$, $c\left(\dfrac{45}{4}\right)=2\times10^5\times\sqrt{\left(\dfrac{15}{4}\right)^2+5^2}+12\times10^4\times\dfrac{45}{4}=2.6\times10^6$(元), $c(15)=2\times10^5\times5+12\times10^4\times15=2.8\times10^6$(元), $c(0)=2\times10^5\sqrt{15^2+5^2}>3\times10^6$. 经比较知, 方案2在$x=\dfrac{45}{4}$时, 管道铺设总费用最省, 与方案1比, 也是方案2省, 总之, 取$x=\dfrac{45}{4}$时, 沿$AMNB$路线铺设管道, 最少总费用为2.6×10^6元.

3. 转化后分类, 分类后转化

有些问题, 先进行转化, 才便于寻找隐性分类的标准.

例5　如图3, 一质点在长方体$A-C_1$的表

面A处, 长方体的长宽高分别为a、b、$c\,(a > b > c)$. 这质点从A出发沿表面到达C_1的最短距离为____.

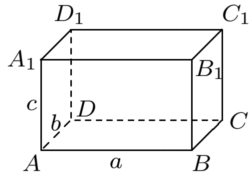


图 3

评析: 把长方体展开, 转化为平面, 对不同展开方式分类, 可归纳为3种途径.

它们的长度分别为:

$\sqrt{a^2+(b+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$,

$\sqrt{b^2+(a+c)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ac}$,

$\sqrt{c^2+(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$,

由$a > b > c$,

故最短距离为$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$.

空间图形中的最短距离问题, 常把空间问题转化为平面问题再分类研究.

有些问题确定了分类标准后, 还不能顺利求解, 就得靠及时转化.

例6 在数列$\{a_n\}$中, $a_1=2$, $a_n+a_{n+1}=1$, $(n\in\mathbf{N}^*)$, 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和, 则$S_{2005}-2S_{2004}+S_{2003}$的值为……………( )

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

评析: 本题的分类标准比较隐蔽, 观察和式$S_{2005}-2S_{2004}+S_{2003}$, 可以想到, n以奇、偶分类, 当n为偶数, $a_1+a_2=1$, $a_3+a_4=1$, $\cdots$, $a_{n-1}+a_n=1$, 以上各式相加有$S_n=\dfrac{n}{2}$. 但当n为奇数时, 怎么办? 转化! 将$a_1=2$分裂出来, $a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$就转化为偶数项之和了, 这时$a_2+a_3=1$, $\cdots$, $a_{n-1}+a_n=1$, 相加之和为$\dfrac{n-1}{2}$, $\therefore S_n=2+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+3}{2}$.

$$\therefore S_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\text{为偶数},\\[2mm] \dfrac{n+3}{2}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

$\therefore S_{2005}=1004$, $S_{2004}=1002$, $S_{2003}=1003$, $\therefore S_{2005}-2S_{2004}+S_{2003}=3$. 选(D).

隐性分类讨论, 何时分类, 没有一个现成的模式可循, 要靠我们认真分析, 随机应变适时潜入. 在平时学习过程中要善于树立分类意识, 培养思维灵活性, 只有这样, 才能对于隐性分类讨论不再望而生畏.

(上接第7–4页)

教育的重中之重. 本刊正如其名, 以服务中学数学教学的改革提高为己任, 建议在当前可否思考如何为西部和农村地区中学数学教学服务, 通过什么方式方法去服务的课题, 在中学数学教学方面缩小西部和东部、农村和城市间存在的差距上做点贡献.

二是加强中学生思想政治工作是中学教育界非常重视的一项工作. 数学中蕴藏着丰富的德育资源, 可否考虑作点挖掘整理, 并介绍给中学数学教师, 以便他们融入数学教育中, 以利于更好地培养中学生.

三是农村特别是西部教育的改革发展, 实施素质教育, 当然需要增加教育投入, 改善办学条件, 调整中小学的结构布局等等, 但是, 关键在于加强教师队伍建设, 全面提高教师队伍的素质. 目前, 那里的教师培训工作已大为加强, 运用现代信息技术手段实施远程教育工作已经启动, 通过光盘播放、卫星接收和计算机上网等方式方法, 使那里的中学老师能享用东部的优质课程教学资源, 本刊可否考虑搜集整理中学数学教学的优质资源, 与有关部门、单位合作, 运用现代信息技术手段, 开展远程教育, 向那里中学数学老师送上优质教学资源, 为农村, 特别是西部中学数学教师的培训提高尽一份力.

最后, 我想在改革发展我国中学数学教育的进程中, 应该开展国际交流, 了解外国同行们的动态, 并在刊物上向国内中学数学工作者介绍有关发展的新趋势. 这方面本刊已经作了许多很好的工作. 可否考虑请有关专家每隔一段时间, 结合我国实际, 在分析整理国外信息的基础上, 发表一篇有自己见解的综述性文章. 这样做可能给我国中学数学工作者于启迪.

构造对偶式的八种途径

226300 江苏省通州高级中学 管宏斌 313000 浙江省湖州二中 蔡 敏

数学中的对偶法就是指在数学解题过程中, 合理地构造形式相似并具有某种对称关系的一对对偶关系式, 然后通过对这对对偶关系式进行适当的和、差、积等运算, 达到解决数学问题的目的. 在数学解题的过程中, 恰当地使用对偶法, 往往能使问题得到巧妙的解决, 收到事半功倍的效果.

一、和差对偶

对于表达式$u(x)\pm v(x)$我们可构造表达式$u(x)\mp v(x)$作为它的对偶关系式..

例1 若$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, 且$3\sin\theta+4\cos\theta=5$, 求$\tan\theta$的值.

解: 构造对偶式$3\sin\theta-4\cos\theta=y$,

则$\begin{cases}3\sin\theta+4\cos\theta=5,\\3\sin\theta-4\cos\theta=y,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{5+y}{6},\\\cos\theta=\dfrac{5-y}{8},\end{cases}$

再由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 得$y=-\dfrac{7}{5}$,

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{3}{4}$.

点评: 这种构造对偶式的方法灵巧、富有创意, 有助于培养学生的创新思维和创造能力.

例2 已知a、b、c、$d\in\mathbf{R}$, 且$a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant1$.

求证: $(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant6$.

证明: 设$M=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4$,

构造对偶式$N=(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$,

则有$M+N=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2)=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leqslant6$.

又$N\geqslant0$, 故$M\leqslant6$, 即原不等式成立.

点评: 构造这个对偶式, 一下子使问题冰消雪融了.

例3 解方程:

$$\sqrt{x^2+8x+21}+\sqrt{x^2-8x+21}=10.$$

解: 构造对偶式

$$\sqrt{x^2+8x+21}-\sqrt{x^2-8x+21}=a,$$

再与原方程联立可解得

$$\sqrt{x^2+8x+21}=\frac{10+a}{2}\cdots\cdots①$$

$$\sqrt{x^2-8x+21}=\frac{10-a}{2}\cdots\cdots②$$

那么①^2 + ②^{2}得

$$2x^2+42=\frac{1}{2}(100+a^2)\cdots\cdots③$$

①^2 − ②^{2}得$16x=10a$, 即$a=\dfrac{8x}{5}$, 代入③中, 得$2x^2+42=\dfrac{1}{2}\left(100+\dfrac{64}{25}x^2\right)$.

整理得$\dfrac{9}{25}x^2=4$, 解得$x=\pm\dfrac{10}{3}$.

二、互倒对偶

互倒对偶是指针对式子的结构, 通过对式中的某些元素取倒数来构造对偶式的方法.

例4 若x、y、$z\in(0,1)$, 求证:

$$\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-y+z}+\frac{1}{1-z+x}\geqslant3.$$

证明: 设$M=\dfrac{1}{1-x+y}+\dfrac{1}{1-y+z}+\dfrac{1}{1-z+x}$,

构造对偶式$N=(1-x+y)+(1-y+z)+(1-z+x)$, 则

$M+N=\dfrac{1}{1-x+y}+(1-x+y)+\dfrac{1}{1-y+z}+(1-y+z)+\dfrac{1}{1-z+x}+(1-z+x)\geqslant2+2+2=6$,

而 $N=3$, 故 $M\geqslant 3$, 即

$$\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-y+z}+\frac{1}{1-z+x}\geqslant 3.$$

例5 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 为互不相等的正整数,

求证: $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

证明: 设 $M=a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$,

构造对偶式 $N=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$,

则 $M+N=\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)+\left(\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant 2\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

又 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相等的正整数,

所以 $N\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,

因此 $M\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

点评: 构造了"意料之中"的对偶式, 化新为旧, 等价转化, 完成对难点的突破.

例6 已知对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 总有 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)+x=0$, 求函数 $y=f(x)$ 的解析式.

解: 设 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)+x=0$ ············①

用 $\frac{1}{x}$ 替代上式中的 x,

构造对偶式 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)+\frac{1}{x}=0$ ··②

① − ② × 2 得 $f(x)+x-4f(x)-\frac{2}{x}=0$, ∴ $f(x)=\frac{x^2-2}{3x}$.

三、共轭对偶

共轭对偶是指利用共轭根式或共轭复数来构造对偶式的方法.

例7 (1992年高考) 已知 $z\in\mathbf{C}$, 解方程: $z\cdot\overline{z}-3\mathrm{i}\overline{z}=1+3\mathrm{i}$.

解: 由 $z\cdot\overline{z}-3\mathrm{i}\overline{z}=1+3\mathrm{i}$ ····················①

构造对偶式 $z\cdot\overline{z}+3\mathrm{i}z=1-3\mathrm{i}$··········②

由①−②, 整理得 $\overline{z}=-z-2$, 代入②, 得 $(z+1)(z+1-3\mathrm{i})=0$,

∴ $z=-1$ 或 $z=-1+3\mathrm{i}$.

例8 若 $z\in\mathbf{C}$, 已知 $|z|=1$ 且 $z\neq\pm1$, 证明: $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数.

证明: 设 $M=\frac{z-1}{z+1}$, 则

$\overline{M}=\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}=\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$,

构造对偶式 $N=\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$, 则 $M+N=\frac{z-1}{z+1}+\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=0$ (∵ $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$).

又∵ $\frac{z-1}{z+1}\neq 0$ (∵ $z\neq\pm1$), 故 $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数.

例9 已知 $a>0$, $b>0$ 且 $a+b=1$, 求证: $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$.

证明: 设 $M=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}$, 构造对偶式 $N=\sqrt{2a+1}-\sqrt{2b+1}$. $M^2\leqslant M^2+N^2=4(a+b)+4=8$, ∴ $M\leqslant 2\sqrt{2}$, 即原不等式成立.

四、倒序对偶

倒序对偶是指针对式子的结构, 通过对和式或积式进行倒序构造对偶式的方法.

例10 求和 $S=1C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+4C_n^4+\cdots+nC_n^n$.

解: 观察和式联想到 $C_n^k=C_n^{n-k}$, $k\in\mathbf{N}^*$, 故首先在和式右边添上一项 $0\cdot C_n^0$,

则 $S=0C_n^0+1C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n$ ①

构造倒序对偶式

$S=nC_n^n+(n-1)C_n^{n-1}+\cdots+0C_n^0$ ②

即②亦为 $S=nC_n^0+(n-1)C_n^1+\cdots+0C_n^n$ ··③

①+③, 则 $2S=nC_n^0+nC_n^1+\cdots+nC_n^{n-1}+nC_n^n$,

∴ $2S=n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)$.

∴ $2S=n\cdot 2^n$, ∴ $S=n\cdot 2^{n-1}$.

点评: 利用现成的对偶式, 使问题本身变得简单、便易.

例11 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $T=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$, $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 试用 S、T 表示 $Q=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$.

分析: 传统解法都用 a_1、q 表示 S、T 及 Q,

然后通过a_1和q找到S、T、Q的等量关系, 这种解法虽思路正确, 但运算繁琐, 加之在用等比数列求和公式时还要讨论$q=1$和$q\neq 1$两种情形, 其实, 观察和式与积式特征, 不妨采取"本末倒置"构造倒序对偶式一试.

解: 由题意$T=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$ ······①

构造倒序对偶式$T=a_n\cdot a_{n-1}\cdot\cdots\cdot a_1$ ②

①×②, 则$T^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\cdot\cdots\cdot(a_na_1)=(a_1a_n)^n$, 即$T=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$ ··········①′

再来看$Q=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ ········③

构造倒序对偶式

$Q=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_1}$ ··············④

③+④, 得

$2Q=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_1}\right)$,

于是$2Q=\frac{a_n+a_1}{a_1\cdot a_n}+\frac{a_{n-1}+a_2}{a_2\cdot a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_1+a_n}{a_n\cdot a_1}$. 由等比数列性质可知, 右边的分母均为$a_1\cdot a_n$, 故$2Q=\frac{(a_n+a_1)+(a_{n-1}+a_2)+\cdots+(a_1+a_n)}{a_1\cdot a_n}$,

即$2Q=\frac{2S}{a_1\cdot a_n}$, $\therefore Q=\frac{S}{a_1\cdot a_n}$,

又由①′可知$a_1\cdot a_n=T^{\frac{2}{n}}$,

$\therefore Q=\frac{S}{T^{\frac{2}{n}}}=\frac{S}{\sqrt[n]{T^2}}$.

五、定值构造

定值对偶是指能利用和、差、积、商等运算产生定值, 并借此构造出对偶式的方法.

例12 (2002年全国高考) 已知函数$f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, 若$S=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$, 则$S=$______.

解: $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=1$, 发现定值$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$,

那么$S=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$ ························①

构造倒序对偶式$S=f(4)+f(3)+f(2)+f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)$ ············②

①+②, 得

$2S=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f(4)\right]+\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f(3)\right]+\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)\right]+2f(1)+\left[f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$,

$\therefore 2S=7$, 即$S=\frac{7}{2}$.

例13 (1990年全国高考题) 已知$f(x)=x^5+ax^3+bx-8$且$f(-2)=10$, 则$f(2)$为 ························( )

(A) -26; (B) -18; (C) -10; (D) 10.

解: 由$f(x)=x^5+ax^3+bx-8$, 容易发现定值$f(x)+f(-x)=-16$,

构造对偶式 $f(-x)=-x^5-ax^3-bx-8$,

故有$f(-2)+f(2)=-16$, 即得$f(2)=-26$, 应选(A).

六、奇偶数对偶

是指利用整数的分类中奇数与偶数的对称性构造对偶式的方法.

例14 求证: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

解: 设$M=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, 构造对偶式$N=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$,

由于$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\cdots$, $\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$,

因此$M<N$, 从而$M^2<M\cdot N=\frac{1}{2n+1}$, 故$M<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

例15 求证:

$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{3n+1}$, $(n\in\mathbf{N}^*)$.

解: 待证不等式的左边为 $(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$.

令 $M=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$,

构造两个对偶式 $N=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}$, $P=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}$.

$\because\ \frac{2}{1}>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}, \frac{5}{4}>\frac{6}{5}>\frac{7}{6}, \cdots, \frac{3n-1}{3n-2}>\frac{3n}{3n-1}>\frac{3n+1}{3n}$,

$\therefore\ M^3>MPN=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}\right)=3n+1$,

$\therefore\ M>\sqrt[3]{3n+1}$, 故原不等式成立.

点评: 灵活地选取解题方法, 对其构造了"意想不到"的对偶式, 从而完成了解答.

七、轮换对偶

轮换对偶是指针对式子的结构, 通过轮换字母而构造对偶式的方法.

例16 (第26届独联体数学奥林匹克试题) 求证: 对任意实数 $a>1$, $b>1$ 都有不等式 $\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8$ 成立.

证明: 设 $M=\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$, 构造对偶式 $N=\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}$, 则

$$M-N=\frac{a^2-b^2}{b-1}+\frac{b^2-a^2}{a-1}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{(a-1)(b-1)}\geqslant 0,$$

即 $M\geqslant N$.

而 $N=b+1+\frac{1}{b-1}+a+1+\frac{1}{a-1}=4+(b-1)+\frac{1}{b-1}+(a-1)+\frac{1}{a-1}\geqslant 4+2+2=8$.

$\therefore\ M\geqslant N\geqslant 8$, 即 $M\geqslant 8$. 当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立.

例17 设 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$, 求证: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.

证明: 设 $M=\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}$,

构造对偶式 $N=\frac{b^2}{a+b}+\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{a+c}$.

$$M+N=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{a+c}\geqslant\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}=a+b+c,$$

又 $M-N=0$, 即

$M=N\geqslant\frac{a+b+c}{2}$,

$\therefore\ \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{a+c}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$.

八、互余对偶

三角中的正弦与余弦是两个对称元素, 利用互余函数构造对偶式、借用配对思想可以轻松完成有关三角题的解答.

例18 已知 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 解方程 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

解: 若令 $M=\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x$,

构造对偶式 $N=\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x$,

则 $M+N=3$ ··································· ①

$$\begin{aligned}M-N&=\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\\&=2\cos x\cos 3x+2\cos^2 3x-1\\&=2\cos 3x(\cos x+\cos 3x)-1\\&=4\cos x\cos 2x\cos 3x-1,\end{aligned}$$

$\therefore\ M-N=4\cos x\cos 2x\cos 3x-1$ ··· ②

① + ②, 得

$\cos x\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{4}(2M-2)$,

又 $M=1$,

$\therefore\ \cos x\cos 2x\cos 3x=0$,

$\therefore\ \cos x=0$ 或 $\cos 2x=0$ 或 $\cos 3x=0$.

又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore\ x=\frac{\pi}{6}$ 或 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$.

点评: 通过构造对偶式, 创设了 $\cos x\cos 2x\cdot\cos 3x=0$ 这一美妙而又能打开局面的有利条件, 可谓"高招"!

例19 求 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ$ 的值.

几何建模一例——最短飞行路径

200062 华东师范大学数学系 袁震东

【问题陈述】

小明从上海乘飞机去美国首都华盛顿旅行. 他惊奇地发现, 虽然华盛顿在上海的东方, 但是飞机并不是朝东飞行的, 而是向东北方向飞行, 经过日本东京、阿留申群岛、底特律到达华盛顿的. 这是为什么呢? 下面我们通过数学模型来说明.

【解题过程】

地球近似于一个球体. 球面几何告诉我们: 任何一个平面与球面相交, 其交线必为一个圆. 当平面通过球心时, 其交线称为大圆. 通过球面上不是对径点(球直径的两端点)的任意两点A与B, 可以画出惟一的一个大圆.

假设1 地球是一个半径为R的球.

假设2 上海和华盛顿分别为球上的点A和点B.

为了解决问题, 我们讨论球面上三个点A、B、C在同一个大圆平面的条件. 分别过赤道、0°经线和东经90°的经线各作一个平面, 分别为平面α、β、γ. 由地理知识可知α、β、γ相互垂直, 其交点O为球心.

设它们的交线分别为Ox、Oy、Oz, 构成空间直角坐标系$O-xyz$(如图1). 设点A、B、C的坐标分别为(a_x,a_y,a_z)、(b_x,b_y,b_z)、(c_x,c_y,c_z).

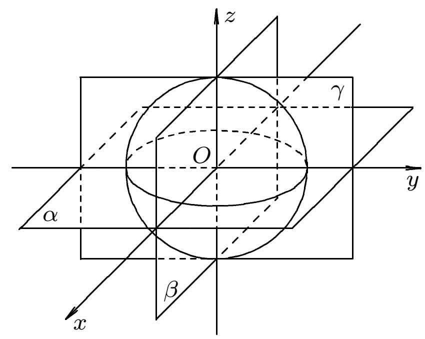


图 1

解: 令$M=\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ$,

构造对偶式$N=\cos^2 10^\circ+\sin^2 40^\circ+\cos 10^\circ\cdot\sin 40^\circ$, 则$M+N=2+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ+\cos 10^\circ\sin 40^\circ=2+\sin 50^\circ$.

$M-N=-\cos 20^\circ+\cos 80^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ-\cos 10^\circ\sin 40^\circ=-2\sin 50^\circ\sin 30^\circ-\sin 30^\circ=-\dfrac{1}{2}-\sin 50^\circ$,

$$\therefore\begin{cases}M+N=2+\sin 50^\circ,\\ M-N=-\dfrac{1}{2}-\sin 50^\circ,\end{cases}$$

$\therefore M=\dfrac{3}{4}$.

点评: 这是一道比较典型的三角求值题. 通过对题目结构特征的观察, 由目标导向, 构造对偶式, 从而独辟蹊径, 这类试题在各类考试中深受命题者青睐.

变题1 (1987年江苏省奥数选拔赛题)求$\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cdot\cos 47^\circ$的值.

变题2 (1991年全国高中数学联赛题)求$\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$的值.

变题3 (1992年全国高考题)求$\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cdot\cos 80^\circ$的值.

变题4 (1995年全国高考题)求$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cdot\cos 50^\circ$的值.

在数学解题过程中, 如果我们恰当地构造对偶关系式, 不仅能提高解题速度, 而且收到了以简驭繁、简缩思维、拓宽思路的功效, 同时还让人萌生一种“春雨断桥人不渡, 小舟撑出柳荫来”的美妙感觉, 对于激发学生学习数学的兴趣也是大有裨益的.

令 $\overrightarrow{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overrightarrow{b}=(b_x,b_y,b_z)$, $\overrightarrow{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 点 A、B、C 在同一大圆上的充要条件是向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 在同一平面上, 而向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 在同一平面上的充要条件是 $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=0$, 即行列式

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

上海到华盛顿间的球面距离等于大圆上过上海和华盛顿的 $\widehat{AB}$ (较短的那条) 的长度.

球面的大圆也叫做球面的测地线. 它们在球面几何中的作用与直线在平面几何中的作用相同. 在平面上, 连结两点的所有连续线中, 直线段最短. 在球面上, 连结 A、B 两点的曲线中, 过 A、B 的大圆弧 $\widehat{AB}$ 是最短的 (图2).

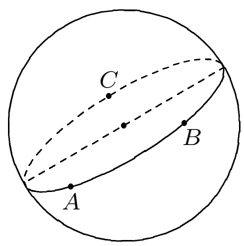


图 2

地球上任何一个城市 (球面上任何一点) 的位置可以用经度和纬度来确定, 经过南、北两极的大圆与球面的交线称为经线, 与两极所成轴线垂直的平面与球面的交线称为纬线. 经度分为东经与西经, 东经为 $0^\circ\sim180^\circ$, 西经也是 $0^\circ\sim180^\circ$. 纬度分北纬和南纬都是 $0^\circ\sim90^\circ$. 在我们建立起来的空间直角坐标系 (图1) 中球面上的点可以用坐标来表示. 点坐标与经度、纬度的关系为 $(x,y,z)=(R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, R\sin\phi)$ (图3), 其中 R 表示地球的半径, θ 表示经度, ϕ 表示纬度.

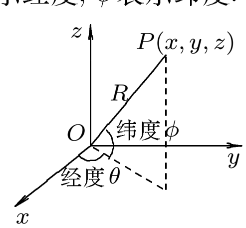


图 3

要检验 A、B、C 三点是否在同一大圆平面上, 只要计算下列行列式:

$$h=\begin{vmatrix} R\cos\phi_a\cos\theta_a & R\cos\phi_a\sin\theta_a & R\sin\phi_a \\ R\cos\phi_b\cos\theta_b & R\cos\phi_b\sin\theta_b & R\sin\phi_b \\ R\cos\phi_c\cos\theta_c & R\cos\phi_c\sin\theta_c & R\sin\phi_c \end{vmatrix}.$$

行列式中 ϕ 和 θ 的下标 a、b、c 分别对应点 A、B、C. 令

$$H=\begin{vmatrix} \cos\phi_a\cos\theta_a & \cos\phi_a\sin\theta_a & \sin\phi_a \\ \cos\phi_b\cos\theta_b & \cos\phi_b\sin\theta_b & \sin\phi_b \\ \cos\phi_c\cos\theta_c & \cos\phi_c\sin\theta_c & \sin\phi_c \end{vmatrix}.$$

因为 $h=R^3H$,

所以要看行列式 h 是否为零, 只要计算 H 就行了, 而 $0\leqslant H\leqslant1$.

下面列出若干城市的经度、纬度及与计算有关的量 (其中Attu在阿留申群岛上):

城市	纬度	经度	$\cos\phi\cos\theta$	$\cos\phi\sin\theta$	$\sin\phi$
上海	31.13N	121.25E	−0.44579	0.72984	0.51828
东京	35.40N	139.45E	−0.62006	0.52492	0.58307
Attu	52.55N	173.00E	−0.59848	0.07348	0.79776
底特律	42.23N	83.05W	0.08896	−0.73327	0.67409
华盛顿	38.55N	77.00W	0.17502	−0.75812	0.62819

计算三个城市位置坐标所对应的 H 行列式, 可以检验这三个城市是否坐落在同一个大圆上, 计算结果如下:

1. 上海、东京、Attu所对应的 H 行列式等于0.0780.

2. 东京、Attu、底特律所对应的 H 行列式等于0.1077.

3. Attu、底特律、华盛顿所对应的 H 行列式等于0.0230.

可见, 上面一些城市对应的 H 行列式或接近于0或远小于1, 利用余弦定理可得上海与华盛顿之间经度相隔不满180°. 因此可以认为上述城市几乎在同一个大圆上, 即经过上述城市的路径是上海到华盛顿的近似最短路径.

验证和讨论: 用一个地球仪和一根绳子做实验验证. 先把绳子过两极绕地球仪的球体一周, 截取绳子长等于大圆周长. 然后用该绳子过上海和华盛顿绕大圆, 可以发现: 阿留申群岛和底特律等都在绳子附近.

【建模心得】

1. 数学建模不仅可解决实际问题, 也可以

(下转第7–1页)

2005年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学(必修+选修Ⅱ)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.

第Ⅰ卷

本卷共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

参考公式:

如果事件A、B互斥, 那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A、B相互独立, 那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P, 那么n次独立重复试验中恰好发生k的概率

$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一、选择题

(1) 复数$\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}^3}{1-\sqrt{2}\mathrm{i}}=$ ……………………( )

(A) i　(B) $-\mathrm{i}$

(C) $2\sqrt{2}-\mathrm{i}$　(D) $-2\sqrt{2}+\mathrm{i}$

(2) 设I为全集, S_1、S_2、S_3是I的三个非空子集且$S_1\cup S_2\cup S_3=I$, 则下面论断正确的是……………………( )

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$

(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

(3) 一个与球心距离为1的平面截球所得的圆面面积为π, 则球的表面积为…………( )

(A) $8\sqrt{2}\pi$　(B) 8π

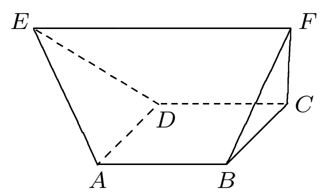
(C) $4\sqrt{2}\pi$　(D) 4π

(4) 已知直线l过点$(-2,0)$, 当直线l与圆$x^2+y^2=2x$有两个交点时, 其斜率k的取值范围是……………………( )

(A) $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$　(B) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

(C) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$　(D) $\left(-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{8}\right)$

(5) 如图, 在多面体$ABCDEF$中, 已知$ABCD$是边长为1的正方形, 且$\triangle ADE$、$\triangle BCF$均为正三角形, $EF/\!/AB$, $EF=2$, 则该多面体的体积为……………………( )



(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{4}{3}$　(D) $\dfrac{3}{2}$

(6) 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$的一条准线与抛物线$y^2=-6x$的准线重合, 则该双曲线的离心率为……………………( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

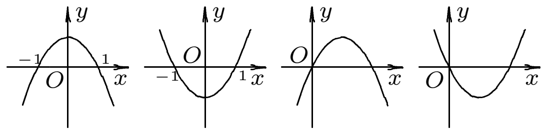
(7) 当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时, 函数

$f(x)=\dfrac{1+\cos 2x+8\sin^2 x}{\sin 2x}$

的最小值为……………………( )

(A) 2　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 4　(D) $4\sqrt{3}$

(8) 设$b>0$, 二次函数$y=ax^2+bx+a^2-1$的图象为下列之一:



则a的值为……………………………………………( )

(A) 1　　(B) -1

(C) $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(9) 设$0<a<1$, 函数$f(x)=\log_a(a^{2x}-2a^x-2)$, 则使$f(x)<0$的$x$取值范围是‥( )

(A) $(-\infty,0)$　　(B) $(0,+\infty)$

(C) $(-\infty,\log_a 3)$　　(D) $(\log_a 3,+\infty)$

(10) 在坐标平面上, 不等式组

$$\begin{cases} y\geqslant x-1 \\ y\leqslant -3|x|+1 \end{cases}$$

所表示的平面区域的面积为…………………( )

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　(D) 2

(11) 在$\triangle ABC$中, 已知

$$\tan\frac{A+B}{2}=\sin C,$$

给出以下四个论断:

① $\tan A\cdot\cot B=1$

② $0<\sin A+\sin B\leqslant\sqrt{2}$

③ $\sin^2 A+\cos^2 B=1$

④ $\cos^2 A+\cos^2 B=\sin^2 C$

其中正确的是……………………………( )

(A) ① ③　　(B) ② ④

(C) ① ④　　(D) ② ③

(12) 过三棱柱任意两个顶点的直线共15条, 其中异面直线有 …………………………( )

(A) 18对　　(B) 24对

(C) 30对　　(D) 36对

第Ⅱ卷

本卷共10小题, 共90分.

二、填空题: 本大题共4小题, 每小题4分, 共16分. 把答案填在题中横线上.

(13) 若正整数m满足$10^{m-1}<2^{512}<10^m$, 则$m=$________. ($\lg 2\approx 0.3010$)

(14) $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$的展开式中, 常数项为________.(用数字作答)

(15) $\triangle ABC$的外接圆的圆心为O, 两条边上的高的交点为H, $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$, 则实数$m=$________.

(16) 在正方体$ABCD-A'B'C'D'$中, 过对角线BD'的一个平面交AA'于E, 交CC'于F, 则

① 四边形$BFD'E$一定是平行四边形.

② 四边形$BFD'E$有可能是正方形.

③ 四边形$BFD'E$在底面$ABCD$内的投影一定是正方形.

④ 平面$BFD'E$有可能垂直于平面$BB'D$.

以上结论正确的为________. (写出所有正确结论的编号)

三、解答题: 本大题共6小题, 共74分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分12分)

设函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)\,(-\pi<\varphi<0)$, $y=f(x)$图象的一条对称轴是直线$x=\dfrac{\pi}{8}$.

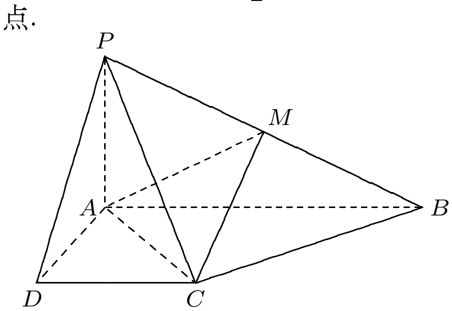
(Ⅰ) 求φ;

(Ⅱ) 求函数$y=f(x)$的单调增区间;

(Ⅲ) 证明直线$5x-2y+c=0$与函数$y=f(x)$的图象不相切.

(18) (本小题满分12分)

已知四棱锥$P-ABCD$的底面为直角梯形, $AB/\!/DC$, $\angle DAB=90^\circ$, $PA\perp$底面$ABCD$, 且$PA=AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=1$, M是PB的中点.



(Ⅰ) 证明: 面$PAD\perp$面PCD;

(Ⅱ) 求AC与PB所成的角;

(Ⅲ) 求面AMC与面BMC所成二面角的大小.

(19) (本小题满分12分)

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q, 前n项和$S_n > 0\,(n=1,\,2,\,\cdots)$.

(Ⅰ)求q的取值范围;

(Ⅱ)设$b_n = a_{n+2} - \dfrac{3}{2}a_{n+1}$, 记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$, 试比较$S_n$和$T_n$的大小.

(20)(本小题满分12分)

9粒种子分种在3个坑内, 每坑3粒, 每粒种子发芽的概率为0.5. 若一个坑内至少有1粒种子发芽, 则这个坑不需要补种; 若一个坑内的种子都没发芽, 则这个坑需要补种. 假定每个坑至多补种一次, 每补种1个坑需10元, 用ξ表示补种费用, 写出ξ的分布列并求ξ的数学期望. (精确到0.01)

(21)(本小题满分14分)

已知椭圆的中心为坐标原点O, 焦点在x轴上. 斜率为1且过椭圆右焦点F的直线交椭圆于A、B两点, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{a}=(3,-1)$共线.

(Ⅰ) 求椭圆的离心率;

(Ⅱ) 设M为椭圆上任意一点, 且$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\,(\lambda、\mu\in\mathbf{R})$, 证明$\lambda^2+\mu^2$为定值.

(22)(本小题满分12分)

(Ⅰ) 设函数$f(x)=x\log_2 x+(1-x)\log_2(1-x)\ (0<x<1)$, 求$f(x)$的最小值;

(Ⅱ) 设正数$p_1,p_2,p_3,\cdots,p_{2^n}$满足$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2^n}=1$, 证明

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+p_3\log_2 p_3+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^n}\geqslant -n$.

参考答案

一、选择题

(1) A (2) C (3) B (4) C

(5) A (6) D (7) C (8) B

(9) C (10) B (11) B (12) D

二、填空题

(13) 155 (14) 672

(15) 1 (16) ① ③ ④

三、解答题

(17)(Ⅰ)解: ∵ $x=\dfrac{\pi}{8}$是函数$y=f(x)$的图象的对称轴,

∴ $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{8}+\varphi\right)=\pm 1$,

∴ $\dfrac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$.

∵ $-\pi<\varphi<0$,

∴ $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$.

(Ⅱ)解: 由(Ⅰ)知$\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$, 因此

$y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

由题意得

$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$.

所以函数$y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$的单调增区间为$\left[k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\pi+\dfrac{5\pi}{8}\right],\ k\in\mathbf{Z}$.

(Ⅲ)证明: ∵ $|y'|=\left|\left(\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)'\right| =\left|2\cos\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right|\leqslant 2$,

所以曲线$y=f(x)$的切线斜率取值范围为$[-2,2]$. 而直线$5x-2y+c=0$的斜率为$\dfrac{5}{2}>2$, 所以直线$5x-2y+c=0$与函数$y=\sin\left(2x-\dfrac{3\pi}{4}\right)$的图象不相切.

(18)方法一:

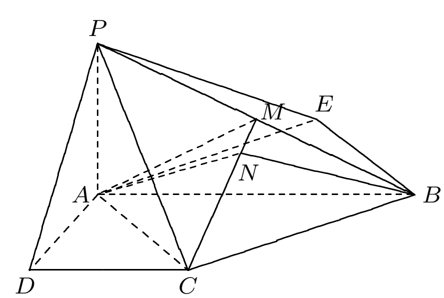
(Ⅰ)证明: ∵ $PA\perp$面$ABCD$, $CD\perp AD$,

∴ 由三垂线定理得:$CD\perp PD$.

因而, CD与面PAD内两条相交直线AD、PD都垂直,

∴ $CD\perp$面PAD.

又$CD\subset$面PCD, ∴ 面$PAD\perp$面PCD.



(Ⅱ)解:过点B作$BE/\!/CA$, 且$BE=CA$, 则$\angle PBE$是AC与PB所成的角.

连结AE, 可知$AC=CB=BE=AE=\sqrt{2}$, 又$AB=2$,

所以四边形$ACBE$为正方形.

由$PA\perp$面$ABCD$得$\angle PEB=90°$,

在$\mathrm{Rt}\triangle PEB$中$BE=\sqrt{2}$, $PB=\sqrt{5}$,

$\therefore\ \cos\angle PBE=\dfrac{BE}{PB}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

$\therefore$ AC与PB所成的角为$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(Ⅲ) 解: 作$AN\perp CM$, 垂足为N, 连结BN.

在$\mathrm{Rt}\triangle PAB$中, $AM=MB$, 又$AC=CB$,

$\therefore\ \triangle AMC\cong\triangle BMC$,

$\therefore\ BN\perp CM$,

故$\angle ANB$为所求二面角的平面角.

$\because$ $CB\perp AC$, 由三垂线定理, 得$CB\perp PC$,

在$\mathrm{Rt}\triangle PCB$中, $CM=MB$,

所以$CM=AM$.

在等腰三角形AMC中,

$$AN\cdot MC=\sqrt{CM^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}\cdot AC,$$

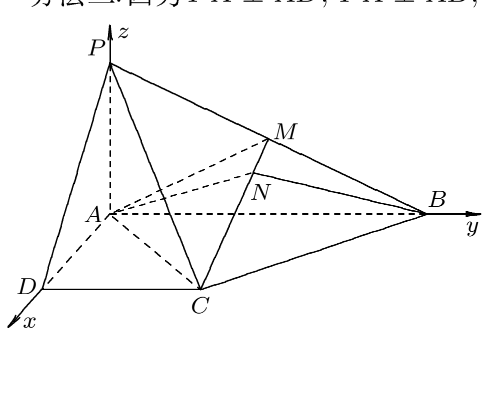
$$\therefore\ AN=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.$$

$\because$ $AB=2$,

$\therefore\ \cos\angle ANB=\dfrac{AN^2+BN^2-AB^2}{2\times AN\times BN}=-\dfrac{2}{3}$.

故所求二面角为$\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

方法二: 因为$PA\perp AD$, $PA\perp AB$, $AD\perp AB$, 以A为坐标原点, AD长为单位长度, 如图建立空间直角坐标系, 则各点坐标为



$A(0,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(1,1,0)$、$D(1,0,0)$、$P(0,0,1)$、$M\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

(Ⅰ) 证明: 因$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$, 故$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, 所以$AP\perp DC$.

又由题设知$AD\perp DC$, 且AP与AD是平面PAD内的两条相交直线, 由此得$DC\perp$面PAD. 又DC在面PCD上, 故面$PAD\perp$面PCD.

(Ⅱ) 解: 因$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{PB}=(0,2,-1)$,

故$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{PB}\right|=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}=2$, 所以

$$\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

由此得AC与PB所成的角为$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(Ⅲ) 解: 在MC上取一点$N(x,y,z)$, 则存在$\lambda\in\mathbf{R}$, 使

$\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}=(1-x,1-y,-z)$, $\overrightarrow{MC}=\left(1,0,-\dfrac{1}{2}\right)$,

$\therefore\ x=1-\lambda$, $y=1$, $z=\dfrac{1}{2}\lambda$.

要使$AN\perp MC$, 只需$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$, 即$x-\dfrac{1}{2}z=0$, 解得$\lambda=\dfrac{4}{5}$.

可知当$\lambda=\dfrac{4}{5}$时, N点坐标为$\left(\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right)$, 能使$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$. 此时,

$\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{1}{5},1,\dfrac{2}{5}\right)$, $\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{1}{5},-1,\dfrac{2}{5}\right)$, 有$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$.

由$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$, $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$得$AN\perp MC$, $BN\perp MC$. 所以$\angle ANB$为所求二面角的平面角.

$\because$ $\left|\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$, $\left|\overrightarrow{BN}\right|=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$, $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=-\dfrac{4}{5}$.

$$\therefore\ \cos\left\langle\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BN}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{AN}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BN}\right|}=-\frac{2}{3}.$$

故所求的二面角为$\arccos\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

(19) 解: (I) 因为$\{a_n\}$是等比数列, $S_n>0$, 可得$a_1=S_1>0$, $q\neq 0$.

当$q=1$时, $S_n=na_1>0$;

当$q\neq 1$时, $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}>0$,

即 $\dfrac{1-q^n}{1-q}>0$, $(n=1,2,\cdots)$

上式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-q<0,\\ 1-q^n<0,\end{cases}(n=1,2,\cdots) \quad ①$$

或

$$\begin{cases}1-q>0,\\ 1-q^n>0,\end{cases}(n=1,2,\cdots) \quad ②$$

解①式得$q>1$; 解②, 由于n可为奇数、可为偶数, 得$-1<q<1$.

综上, q的取值范围是$(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

(Ⅱ) 由$b_n=a_{n+2}-\dfrac{3}{2}a_{n+1}$得

$b_n=a_n\left(q^2-\dfrac{3}{2}q\right)$, $T_n=\left(q^2-\dfrac{3}{2}q\right)S_n$.

于是 $T_n-S_n=S_n\left(q^2-\dfrac{3}{2}q-1\right)$

$=S_n\left(q+\dfrac{1}{2}\right)(q-2)$.

又因为$S_n>0$, 且$-1<q<0$或$q>0$, 所以,

当$-1<q<-\dfrac{1}{2}$或$q>2$时, $T_n-S_n>0$, 即$T_n>S_n$;

当$-\dfrac{1}{2}<q<2$且$q\neq 0$时, $T_n-S_n<0$, 即$T_n<S_n$;

当$q=-\dfrac{1}{2}$或$q=2$时, $T_n-S_n=0$, 即$T_n=S_n$.

(20) 解: 因为单个坑内的3粒种子都不发芽的概率为$(1-0.5)^3=\dfrac{1}{8}$, 所以单个坑不需要补种的概率为$1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$.

3个坑都不需要补种的概率为

$C_3^0\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^0\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^3=0.670$,

恰有1个坑需要补种的概率为

$C_3^1\times\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^2=0.287$,

恰有2个坑需要补种的概率为

$C_3^2\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^2\times\dfrac{7}{8}=0.041$,

3个坑需要补种的概率为

$C_3^3\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^0=0.002$,

补种费用ξ的分布列为

ξ	0	10	20	30
P	0.670	0.287	0.041	0.002

ξ的数学期望为

$E\xi=0\times0.670+10\times0.287+20\times0.041+30\times0.002=3.75$.

(21) (I) 解: 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, $F(c,0)$,

则直线AB方程为$y=x-c$,

代入$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 化简得

$(a^2+b^2)x^2-2a^2cx+a^2c^2-a^2b^2=0$.

令$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则

$x_1+x_2=\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}$, $x_1x_2=\dfrac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$.

由$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, $\overrightarrow{a}=(3,-1)$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{a}$共线, 得

$3(y_1+y_2)+(x_1+x_2)=0$.

又 $y_1=x_1-c$, $y_2=x_2-c$,

$\therefore\ 3(x_1+x_2-2c)+(x_1+x_2)=0$,

$\therefore\ x_1+x_2=\dfrac{3c}{2}$.

即 $\dfrac{2a^2c}{a^2+b^2}=\dfrac{3c}{2}$, 所以$a^2=3b^2$.

$\therefore\ c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$,

故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅱ) 证明: 由 (I) 知$a^2=3b^2$, 所以椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$可化为

$x^2+3y^2=3b^2$.

设$\overrightarrow{OM}=(x,y)$, 由已知得

$(x,y)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)$,

$\therefore\begin{cases}x=\lambda x_1+\mu x_2,\\ y=\lambda y_1+\mu y_2.\end{cases}$

$\because\ M(x,y)$在椭圆上,

$\therefore (\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$.

即 $\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)$

$+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$. ①

由(I)知 $x_1+x_2=\frac{3}{2}c$,

$a^2=\frac{3}{2}c^2$, $b^2=\frac{1}{2}c^2$.

$\therefore\ x_1x_2=\frac{a^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{8}c^2$.

$\therefore x_1x_2+3y_1y_2$

$=x_1x_2+3(x_1-c)(x_2-c)$

$=4x_1x_2-3(x_1+x_2)c+3c^2$

$=\frac{3}{2}c^2-\frac{9}{2}c^2+3c^2=0$.

又 $x_1^2+3y_1^2=3b^2$, $x_2^2+3y_2^2=3b^2$, 代入①得

$\lambda^2+\mu^2=1$.

故 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值, 定值为1.

(22) (I) 解: 对函数 $f(x)$ 求导数:

$f'(x)=(x\log_2 x)'+[(1-x)\log_2(1-x)]'$

$=\log_2 x-\log_2(1-x)+\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}$

$=\log_2 x-\log_2(1-x)$.

于是 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)<0$, $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 是减函数,

当 $x>\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)=\log_2 x-\log_2(1-x)>0$, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 是增函数.

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时取得最小值, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$.

(Ⅱ) 证法一: 用数学归纳法证明.

(i) 当 $n=1$ 时, 由(I)知命题成立.

(ii) 假定当 $n=k$ 时命题成立, 即若正数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2\cdots+p_{2^k}=1$, 则

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\geqslant -k$.

当 $n=k+1$ 时, 若正数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$, 令

$x=p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}$, $q_1=\frac{p_1}{x}$, $q_2=\frac{p_2}{x}$, $\cdots$, $q_{2^k}=\frac{p_{2^k}}{x}$.

则 $q_1, q_2, \cdots, q_{2^k}$ 为正数, 且 $q_1+q_2+\cdots+q_{2^k}=1$.

由归纳假定知 $q_1\log_2 q_1+q_2\log_2 q_2+\cdots+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}\geqslant -k$.

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}$

$=x(q_1\log_2 q_1+q_2\log_2 q_2+\cdots$

$+q_{2^k}\log_2 q_{2^k}+\log_2 x)$

$\geqslant x(-k)+x\log_2 x$, ①

同理, 由 $p_{2^k+1}+p_{2^k+2}+\cdots+p_{2^{k+1}}=1-x$, 可得

$p_{2^k+1}\log_2 p_{2^k+1}+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

$\geqslant(1-x)(-k)+(1-x)\log_2(1-x)$. ②

综合①、②两式

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$

$\geqslant[x+(1-x)](-k)+x\log_2 x$

$+(1-x)\log_2(1-x)$

$\geqslant-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

根据(i)、(ii)可知对一切正整数 n 命题成立.

证法二:

令函数 $g(x)=x\log_2 x+(c-x)\log_2(c-x)$ (常数 $c>0$, $x\in(0,c)$), 那么

$g(x)=c\left[\frac{x}{c}\log_2\frac{x}{c}+\left(1-\frac{x}{c}\right)\log_2\left(1-\frac{x}{c}\right)\right.$

$\left.+\log_2 c\right]$,

利用(I)知, 当 $\frac{x}{c}=\frac{1}{2}$ $\left(即 x=\frac{c}{2}\right)$ 时, 函数 $g(x)$ 取得最小值.

于是对任意 $x_1>0$, $x_2>0$, 都有

$x_1\log_2 x_1+x_2\log_2 x_2$

$\geqslant 2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\log_2\frac{x_1+x_2}{2}$

$=(x_1+x_2)[\log_2(x_1+x_2)-1]$. ①

下面用数学归纳法证明结论.

(i) 当 $n=1$ 时, 由(I)知命题成立.

(ii) 设当 $n=k$ 时命题成立. 即若正数 $p_1, p_2, \cdots, p_{2^k}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^k}=1$, 有

$p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots+p_{2^k}\log_2 p_{2^k}\geqslant -k$.

2005年全国普通高等学校招生统一考试

上海 数学试卷(理工农医类)

考生注意: 本试卷共有22道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题, 只要求直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________.

2. 方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是________.

3. 直角坐标平面 xOy 中, 若定点 $A(1,2)$ 与动点 $P(x,y)$ 满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, 则点 P 的轨迹方程式是________.

4. 在 $(x-a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数是15. 则实数 $a=$ ________.

5. 若双曲线的渐线方程为 $y=\pm 3x$, 它的一个焦点是 $(\sqrt{10},0)$, 则双曲线的方程是________.

6. 将参数方程 $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)化为普通方程, 所得方程是________.

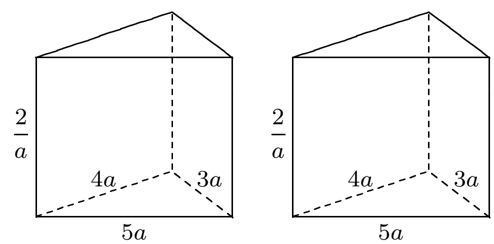
7. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=$ ________.

8. 某班有50名学生, 其中15人选修A课程, 另外35人选修B课程. 从班组中任选两名学生, 他们是选修不同课程的学生的概率是________. (结果用分数表示)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A=120^\circ$, $AB=5$, $BC=7$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=$ ________.

10. 函数 $f(x)=\sin x+2|\sin x|$, $x\in[0,2\pi]$ 的图象与直线 $y=k$ 有且仅有两个不同的交点, 则 k 的取值范围是________.

11. 有两个相同的直三棱柱, 高为 $\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为 $3a$、$4a$、$5a$ $(a>0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则 a 的取值范围是________.



12. 用 n 个不同的实数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 可得到 $n!$ 个不同的排列, 每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵. 对第 i 行 a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in}, 记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1$, 2, 3, $\cdots$, $n!$. 例如: 用1, 2, 3可得数阵如右, 由于此数阵中每一列各数之和都是12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times$

当 $n=k+1$ 时, p_1, p_2, $\cdots$, $p_{2^{k+1}}$ 满足 $p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}}=1$.

令 $H=p_1\log_2 p_1+p_2\log_2 p_2+\cdots$
$+p_{2^{k+1}-1}\log_2 p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}}\log_2 p_{2^{k+1}}$,

由 ① 得到

$H\geqslant(p_1+p_2)[\log_2(p_1+p_2)-1]+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})[\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})-1]$,

因为 $(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=1$,

由归纳法假设

$(p_1+p_2)\log_2(p_1+p_2)+\cdots+(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\log_2(p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})\geqslant -k$, 得到

$H\geqslant -k-(p_1+p_2+\cdots+p_{2^{k+1}-1}+p_{2^{k+1}})=-(k+1)$.

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

所以对一切正整数 n 命题成立.

$12=-24$. 那么, 在用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$________.

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\\2&1&3\\2&3&1\\3&1&2\\3&2&1\end{matrix}$$

二、选择题(本大题满分16分)本大题共有4题, 每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确的结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得4分. 不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括号内), 一律得零分.

13. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 ……( )

(A) 单调递减无最小值.

(B) 单调递减有最小值.

(C) 单调递增无最大值.

(D) 单调递增有最大值.

14. 已知集合 $M=\{x||x-1|\leqslant 2, x\in R\}$, $P=\left\{x\left|\dfrac{5}{x+1}\geqslant 1,\ x\in \mathbf{Z}\right.\right\}$, 则 $M\cap P$ 等于 ……( )

(A) $\{x|0<x\leqslant 3, x\in \mathbf{Z}\}$.

(B) $\{x|0\leqslant x\leqslant 3, x\in \mathbf{Z}\}$.

(C) $\{x|-1\leqslant x\leqslant 0, x\in \mathbf{Z}\}$.

(D) $\{x|-1\leqslant x<0, x\in \mathbf{Z}\}$.

15. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点, 它们的横坐标之和等于5, 则这样的直线 ……( )

(A) 有且仅有一条. (B) 有且仅有两条.

(C) 有无穷多条. (D) 不存在.

16. 设定义域为 R 的函数

$$f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有7个不同实数解的充要条件是 ……( )

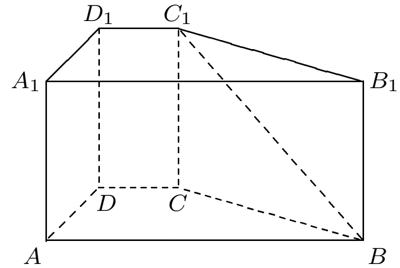
(A) $b<0$ 且 $c>0$. (B) $b<0$ 且 $c<0$.

(C) $b<0$ 且 $c=0$. (D) $b\geqslant 0$ 且 $c=0$.

三、解答题(本大题满分86分)本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. **(本题满分12分)**

已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1=2$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $\angle A$ 为直角, $AB/\!/CD$, $AB=4$, $AD=2$, $DC=1$, 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小. (结果用反三角函数表示)

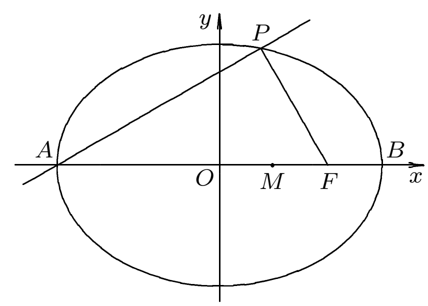


18. **(本题满分12分)**

证明: 在复数范围内, 方程 $|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ (i为虚数单位) 无解.

19. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

如图, 点 A、B 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$ 长轴的左、右端点, 点 F 是椭圆的右焦点. 点 P 在椭圆上, 且位于 x 轴上方, $PA\perp PF$.



(1) 求点 P 的坐标;

(2) 设 M 是椭圆长轴 AB 上的一点, M 到直线 AP 的距离等于 $|AB|$, 求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

20. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

假设某市2004年新建住房400万平方米, 其中有250万平方米是中低价房. 预计在今后的若干年内, 该市每年新建住房面积均比上一年增长8%. 另外, 每年新建住房中, 中低价房

的面积均比上一年增加50万平方米. 那么, 到哪一年底,

(1) 该市历年所建中低价房的累计面积(以2004年为累计的第一年)将首次不少于4750万平方米?

(2) 当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首闪大于85%?

21. **(本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.**

对定义域分别是D_f、D_g的函数$y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & \text{当} x\in D_f \text{且} x\in D_g \\ f(x) & \text{当} x\in D_f \text{且} x\notin D_g \\ g(x) & \text{当} x\notin D_f \text{且} x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$, 写出函数$h(x)$的解析式;

(2) 求问题(1)中函数$h(x)$的值域;

(3) 若$g(x)=f(x+\alpha)$, 其中α是常数, 且$\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为R的函数$y=f(x)$, 用一个α的值, 使得$h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

22. **(本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分8分, 第3小题满分6分.**

在直角坐标平面中, 已知点$P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\cdots$, $P_n(n,2^n)$, 其中n是正整数, 对平面上任一点A_0, 记A_1为A_0关于点P_1的对称点, A_2为A_1关于点P_2的对称点, $\cdots$, A_n为A_{n-1}关于点P_n的对称点.

(1) 求向量$\overrightarrow{A_0A_2}$的坐标;

(2) 当点A_0在曲线C上移动时, 点A_2的轨迹是函数$y=f(x)$的图象, 其中$f(x)$是以3为周期的周期函数, 且当$x\in(0,3]$时, $f(x)=\lg x$. 求以曲线C为图象的函数在$(1,4]$上的解析式;

(3) 对任意偶数n, 用n表示向量$\overrightarrow{A_0A_n}$的坐标.

答案要点

一、(第1题至第12题)

1. 4^x-1. 2. $x=0$.

3. $x+2y-4=0$. 4. $-\dfrac{1}{2}$.

5. $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$. 6. $(x-1)^2+y^2=4$.

7. 3. 8. $\dfrac{3}{7}$.

9. $\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$. 10. $1<k<3$.

11. $0<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. 12. -1080.

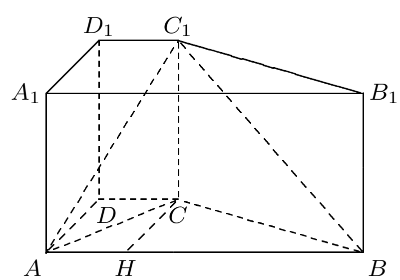
二、(第13题至第16题)

题号	13	14	15	16
代号	A	B	B	C

三、(第17题至第22题)

17. [解法一] 由题意$AB/\!/DC$, ∴ $\angle C_1BA$是异面直线BC_1与DC所成的角. 连结AC_1与AC, 在Rt$\triangle ADC$中, 可得$AC=\sqrt{5}$. 又在Rt$\triangle ACC_1$中, 可得$AC_1=3$.

在梯形$ABCD$中, 过C作$CH/\!/AD$交AB于H,



得$\angle CHB=90°$, $CH=2$, $HB=3$,

∴ $CB=\sqrt{13}$. 又在Rt$\triangle CBC_1$中, 可得$BC_1=\sqrt{17}$,

在$\triangle ABC_1$中,

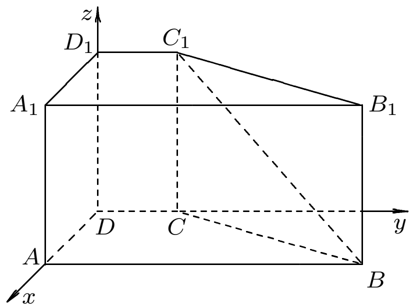
$$\cos\angle ABC_1=\frac{AB^2+BC_1^2-AC_1^2}{2AB\cdot BC_1}=\frac{3\sqrt{17}}{17}.$$

∴ $\angle ABC_1=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

∴ 异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

[解法二] 如图, 以D为坐标原点, 分别以DA、DC、DD_1所在直线为x、y、z轴建立直角坐标系.

则$C_1(0,1,2)$, $B(2,4,0)$,



$\therefore\ \overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$,

$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$,

设$\overrightarrow{BC_1}$与$\overrightarrow{CD}$所成的角为θ,

则$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$,

$\theta=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$,

$\therefore$ 异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

18. [证明] 原方程化简为$|z|^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}-(1+\mathrm{i})z=1-3\mathrm{i}$.

设$z=x+y\mathrm{i}\quad(x、y\in R)$, 代入上述方程得

$x^2+y^2-2x\mathrm{i}-2y\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$,

$$\therefore\begin{cases}x^2+y^2=1 & (1)\\ 2x+2y=3, & (2)\end{cases}$$

将(2)代入(1), 整理得

$$8x^2-12x+5=0 \qquad (*)$$

$\because\ \Delta=-16<0$, $\therefore$ 方程$(*)$无实数解.

$\therefore$ 原方程在复数范围内无解.

19. [解] (1) 由已知可得点$A(-6,0)$、$F(4,0)$, 设点P的坐标是(x,y), 则$\overrightarrow{AP}=\{x+6,y\}$, $\overrightarrow{AP}=\{x-4,y\}$, 由已知得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1\\ (x+6)(x-4)+y^2=0,\end{cases}$$

则$2x^2+9x-18=0$, $x=\dfrac{3}{2}$或$x=-6$.

由于$y>0$, 只能$x=\dfrac{3}{2}$, 于是$y=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点P的坐标是$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.

(2) 直线AP的方程是$x-\sqrt{3}y+6=0$,

设点M的坐标是$(m,0)$, 则M到直线AP的距离是$\dfrac{|m+6|}{2}$,

于是$\dfrac{|m+6|}{2}=|m-6|$, 又$-6\leqslant m\leqslant 6$, 解得$m=2$,

椭圆上的点(x,y)到点M的距离d有

$$\begin{aligned}d^2&=(x-2)^2+y^2\\&=x^2-4x+4+20-\frac{5}{9}x^2,\\&=\frac{4}{9}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+15\end{aligned}$$

由于$-6\leqslant x\leqslant 6$,

$\therefore$ 当$x=\dfrac{9}{2}$时, d取得最小值$\sqrt{15}$.

20. [解] (1) 设中低价房面积形成数列$\{a_n\}$, 则题意可知$\{a_n\}$是等差数列,

其中$a_1=250$, $d=50$,

则$S_n=250n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 50=25n^2+225n$,

令$25n^2+225n\geqslant 4750$,

即$n^2+9n-190\geqslant 0$, 而n是正整数, $\therefore\ n\geqslant 10$.

$\therefore$ 到2013年底, 该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于4750万平方米.

(2) 设新建住房面积形成数列$\{b_n\}$, 由题意可知$\{b_n\}$是等比数列,

其中$b_1=400$, $q=1.08$,

则$b_n=400\cdot(1.08)^{n-1}$.

由题意可知$a_n>0.85b_n$,

有$250+(n-1)\cdot 50>400\cdot(1.08)^{n-1}\cdot 0.85$.

由计算器解得满足上述不等式的最小正整数$n=6$.

$\therefore$ 到2009年底, 当年建造的中低价面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%.

21. [解] (1)

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}, & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

(2) 当$x\neq 1$时, $h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}+2$,

若$x>1$, 则$h(x)\geqslant 4$, 其中等号当$x=2$时成立.

若$x<1$, 则$h(x)\leqslant 0$, 其中等号当$x=0$时成立.

∴ 函数$h(x)$值域是

$(-\infty,0)\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$.

(3) [解法一] 令$f(x)=\sin 2x+\cos 2x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, 则$g(x)=f(x+\alpha)$

$$=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos 2x-\sin 2x,$$

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$
$$=(\sin 2x+\cos 2x)(\cos 2x-\sin 2x)$$
$$=\cos 4x.$$

[解法二] 令$f(x)=1+\sqrt{2}\sin 2x$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

则 $g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$$=1-\sqrt{2}\sin 2x,$$

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)$
$$=(1+\sqrt{2}\sin 2x)(1-\sqrt{2}\sin 2x)$$
$$=1-2\sin^2 2x$$
$$=\cos 4x.$$

22. [解] (1) 设点$A_1(x,y)$,

A_0 关于点 P_1 的对称点 A_1 的坐标为 $A_1(2-x,4-y)$,

A_1 关于点 P_2 的对称点 A_2 的坐标为 $A_2(2+x,4+y)$,

所以, $\overrightarrow{A_0A_2}=\{2,4\}$,

(2) [解法一] ∵ $\overrightarrow{A_0A_2}=\{2,4\}$,

∴ $f(x)$的图象由曲线C向右平移2个单位, 再向上平移4个单位得到.

因此, 曲线C是函数$y=g(x)$的图象, 其中$g(x)$是以3为周期的周期函数, 且当$x\in(-2,1]$时, $g(x)=\lg(x+2)-4$. 于是, 当$x\in(1,4]$时, $g(x)=\lg(x-1)-4$.

[解法二] 设$A_0(x,y)$, $A_2(x_2y_2)$, 于是
$$\begin{cases}x_2-x=2\\ y_2-y=4.\end{cases}$$

若$3<x_2\leqslant 6$, 则$0<x_2-3\leqslant 3$, 于是$f(x_2)=f(x_2-3)=\lg(x_2-3)$.

当$1<x\leqslant 4$时, 则有$3<x_2\leqslant 6$, $y+4=\lg(x-1)$,

∴ 当$x\in(1,4]$时, $g(x)=\lg(x-1)-4$.

(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$,

由于$\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k}}=2\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$, 得

$$\overrightarrow{A_0A_n}=2\left(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}\right)$$
$$=2(\{1,2\}+\{1,2^3\}+\cdots+\{1,2^{n-1}\})$$
$$=2\left\{\frac{n}{2},\frac{2(2^n-1)}{3}\right\}=\left\{n,\frac{4(2^n-1)}{3}\right\}.$$

(上接第7–42页)

0°线上的端点N固定在F上, 再把量角器绕点F顺时针方向旋转$\angle\alpha$($0°<\alpha<90°$), 使得点M转为点M'. 此时量角器的半圆弧与EF相交于点P, 设点P处量角器的读数为$n°$.

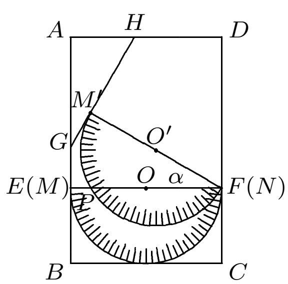


图 5

(1) 用含$n°$的代数式表示$\angle\alpha$的大小;

(2) 当$n°$等于多少时, 线段PC与$M'F$平行?

(3) 在量角器的旋转过程中, 过点M'作$GH\perp M'F$, 交AE于点G, 交AD于点H. 设$GE=x$, $\triangle AGH$的面积为S, 试求出S关于x的函数关系式, 并写出自变量x的取值范围.

简评: 本题要求学生在会正确使用量角器的基础上, 一方面用正确读数方面的知识来求有关角的大小; 另一方面要在学会假设存在的前提下去探索其解; 再次要合理运用勾股定理, 学会用一个字母的代数式表示另一个字母, 从而设法求得函数关系式.

由上可知, 数学常规用具的运用可以说是最贴近考生实际不过的了, 运用这些来制作命题, 题风很好, 应当不断发扬.

中学数学常规教具下的中考题

226600 江苏省海安县海南中学 陈振华

三角板、圆规、量角器是师生在教学过程中常用的教具和学具. 翻阅近年来的中考试卷, 运用这些常规教具和学具作答的试题也时有发现. 现摘选其中部分简述如下:

题1 (2004年黑龙江省中考试题第三题) 如图1, 将一副三角板叠放在一起, 使直角的顶点重合于点O, 则$\angle AOC+\angle DOB$的度数为______度.

简评: 此题要求明确特殊与一般的辩证关系, 要求会对简单的图形进行组合与拆分, 并能灵活地运用等量代换解题.

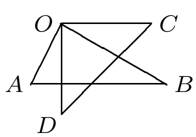


图 1

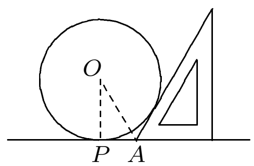


图 2

题2 (2003年湖北省荆州市中考试题) 为了测量一个圆形铁环的半径, 某同学采取如下方法: 将铁环平放在水平桌面上, 用一把锐角为30°的三角板和一把刻度尺, 按照如图2所示的方法得到相关的数据, 进而可求得铁环的半径. 若测得$PA=5\text{cm}$, 则铁环的半径是______cm.

简评: 测量圆的半径的方法很多, 例如可依据切线的性质定理、切线长定理以及解直角三角形三方面的知识进行综合解决, 即过P点作直线$l\perp PA$, 再用三角板画一个顶点为A, 一边为AP, 大小为60°的角, 这时角的另一边与l交于点O, 则O就是圆环的圆心, 由$\tan 60^\circ=\dfrac{OP}{PA}$, 可求出$OP$.

题3 (2004年山东省青岛市中考试卷压轴题) 把两个全等的等腰直角三角板ABC和EFG (其直角边长均为4) 叠放在一起 (图3), 且使三角板EFG的直角顶点G与三角板ABC的斜边中点O重合. 现将三角板EFG绕点G顺时针旋转 (旋转角α满足条件: $0^\circ<\alpha<90^\circ$), 四边形$CHGK$是旋转过程中两三角板的重叠部分 (图4).

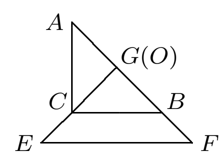


图 3

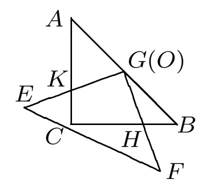


图 4

(1) 在上述旋转过程中, BH与CK有怎样的数量关系? 四边形$CHGK$的面积有何变化? 证明你发现的结论;

(2) 连结HK, 在上述旋转过程中, 设$BH=x$, $\triangle GHK$的面积为y, 求y与x之间的函数关系式, 并写出自变量x的取值范围;

(3) 在 (2) 的前提下, 是否存在某一位置, 使$\triangle GHK$的面积恰好等于$\triangle ABC$面积的$\dfrac{5}{16}$? 若存在, 求出此时x的值; 若不存在, 说明理由.

简评: 本题要求考生能从极限位置着手, 在变化中探求不变的内容. 在这过程中, 要能及时发现三角形全等的结论, 要学会运用补集法解数学的思想方法, 必须熟练掌握探究题的常规解法.

题4 (江西省2004年中考题最后一题) 如图5, 在矩形$ABCD$中, $AB=3$, $AD=2$, 点E、F分别在AB、DC上, $AE=DF=2$. 现有一块直径为2的量角器 (圆心为O) 放置在图形上, 使其0°线MN与EF重合; 若将量角器

(下转第7–41页)

2005年日本全国统考数学II·数学B的试题分析

200062 华东师范大学数学系 陈月兰

一年一度的日本统一考试已于2005年的1月15、16日两天举行. 数学II·数学B的考试时间为1小时, 满分为100分. 参加该项考试的学生有326,674人(去年为339,071人), 平均得分为52.47分(去年为45.65), 标准差为18.89(去年为20.19). 共6个试题, 其中第一、第二题为必答题; 第三、第四、第五、第六题为选做题, 从中选做两题, 与前面的两个必答题合计做四题即可. 试题均为客观题, 除了第六题外, 其余均为填充题.

今年的试题与去年相比, 总体上必答题的难度相差无几, 但选做题的难度都比去年有所下降, 计算量也比去年小了. 在选做题中无论是关于向量试题还是复平面试题, 推理过程的引导基本上由浅入深、循序渐进, 比较符合考生的认知规律. 出题方式有所改变, 没有因为计算的错误, 导致整个解题失败. 鉴于上述的理由, 历经三年后今年的平均分终于到达了50分以上 (表1–1).

表1–1

年　度	2005	2004	2003
平均分	52.47	45.65	49.84
标准差	18.89	20.19	17.18

表1–2

	2005年	2004年	2003年
第一题	三角函数、指数和对数函数	指数、对数函数和三角函数	三角函数、对数函数
第二题	图象与方程式、微积分	微积分、图象和方程式	微积分
第三题	向量	向量	向量
第四题	复平面	复数与复平面	复数与复平面
第五题	概率分布	概率分布	概率分布
第六题	计算机	计算机	计算机

从表1–2中可以看到出题的内容范围基本上与过去相似, 没有特别大的变化. 但仔细分析可以发现微积分这部分出得较少, 这也许是为了与明年统考逐步接近的原因.

明年是新指导要领实施后的第一次考试, 考试内容将会有较大改变, 从现在的6门学科32个科目减少到28个科目. 数学在原来的《数学I》、《数学Ⅱ》、《数学Ⅲ》、《数学A》、《数学B》、《数学C》等6个科目外又增加了《数学基础》, 有关《数学基础》的出题范围和内容目前暂定为以新指导要领为主, 如何考试, 中心正在研讨之中, 在新指导要领下的日本的全国统考无论在内容上还是在形式上据说肯定会改革, 我们将拭目以待.

下面就今年的统考题进行逐一分析:

第一大题有两个小问题

[1]是关于三角函数、指数和对数函数的试题, 共17分. 利用倍角、半角公式进行恒等变形, 最后转化为求二次函数的最大值和最小值, 要求变换熟练、快速, 而且有一定的计算量.

[2]是关于指数、对数间比较大小的试题, 共13分. 判断a与b的大小, 需要经过较复杂的计算后, 才能有结果, 这里是否能够灵活运用给出的条件是解题的关键.

第二大题是关于图象、方程式和微积分的试题, 共13分. 表面上看是传统题, 但出题的内涵正在悄悄地发生变化, 比如图象在坐标系中正确的位置用选择题的形式出现, 这是从未有过的, 估计这是为明年新指导要领实施后的第一次考试作准备. 另外, 今年虽然也有关于微积分试题, 但只是一次积分, 同去年相比, 显得比较容易.

第三题是关于向量在平面几何中应用的试题, 共30分. 涉及到向量的坐标表示、内积和绝对值等相关内容. 由于题目较长, 初看给人一种复杂的感觉, 如果不认真审题, 可能会对

题目的理解带来障碍. 特别是所给出的向量的始点不是原点, 可能会对考生带来一定的困难. 但由于引导得比较自然, 所以只要能够攻破题初的一些小问题, 那么后面的解决也就比较顺利了.

第四题是关于复平面的试题, 共30分. 前半部分的出题形式是历年来典型的形式, 对考生来说应该没有问题. 至于后半部分如能合理运用前半部分的结果, 那么进展会很顺利. 求p和q的关系式对某些考生来说可能会感到有些不知所措, 无从下手. 而后一个空格因为与前面没有关系, 相对也比较简单, 应该没有什么问题.

第五题是关于概率分布的试题, 共30分. 这种先设定好游戏规则, 然后将骰子掷出, 根据掷出来的情况以及规则得到相应的点数的概率题是这几年来经常出现在统考中的题目. 前半部分的问题的设置是传统题, 后面的减去点数的出题方式比较新颖. 题目较长, 设问有一定的难度, 但这些都是数学I中概率部分的基本内容, 如果对这部分内容掌握好的话, 应该可以正确解答. 后面的条件概率以及数学期望是数学B的内容, 前面能顺利完成的话, 下面只要直接利用这些结果即可.

第六题是求有关本利和与余额的程序, 共30分. 由于题目选择的是与存款、利息有关的问题, 因此首先考生要具有一定的数学思考能力, 需要将实际问题数学化; 其次要熟练掌握等比数列等数学知识; 最后当然要有编程的能力. 这里如果能够区别时刻、定期存款的周期的概念, 那么解题时不会感到困难. 编程题从以往关注纯数学内容发展为与实际生活相联系, 这不能不说是一个很大的转变.

具体试题请看下面的附录.

参考文献:

http://www.dnc.ac.jp

第一题 (必答题30分)

[1] 设$A(-1,0)$、$B(\cos\theta,\sin\theta)$、$C(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$是平面直角坐标系上三点, 当$\theta$在$0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$范围内变化时, 求$d = AC + BC$的最大值和最小值.

求解过程:

(1) 因为

$$AC^2 = \boxed{\text{A}} + 2\cos 2\theta = \boxed{\text{B}}\cos^2\theta,$$

$$BC^2 = \boxed{\text{C}} - 2\cos\theta = \boxed{\text{D}}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

所以$d = \boxed{\text{E}}|\cos\theta| + \boxed{\text{F}}\sin\dfrac{\theta}{2}$.

(2) 设$t = \sin\dfrac{\theta}{2}$, 因为

当$0^\circ \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$时, $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{G}}}}{\boxed{\text{H}}}$, $d = -\boxed{\text{I}}t^2 + \boxed{\text{J}}t + 2$;

当$90^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^\circ$时, $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{G}}}}{\boxed{\text{H}}} \leqslant t \leqslant 1$, $d = \boxed{\text{I}}t^2 + \boxed{\text{J}}t - 2$;

从而当$t = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}}$时, d取得最小值$\sqrt{\boxed{\text{M}}}$, 此时$\theta = \boxed{\text{NO}}^\circ$;

当$t = \boxed{\text{P}}$时, d取得最大值$\sqrt{\boxed{\text{Q}}}$, 此时$\theta = \boxed{\text{RST}}^\circ$.

参考答案: $\boxed{\text{A}} = 2$; $\boxed{\text{B}} = 4$; $\boxed{\text{C}} = 2$; $\boxed{\text{D}} = 4$; $\boxed{\text{E}} = 2$; $\boxed{\text{F}} = 2$; $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{G}}}}{\boxed{\text{H}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\boxed{\text{I}} = 4$; $\boxed{\text{J}} = 2$; $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{K}}}}{\boxed{\text{L}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{\boxed{\text{M}}} = \sqrt{2}$; $\boxed{\text{NO}}^\circ = 90^\circ$; $\boxed{\text{P}} = 1$; $\sqrt{\boxed{\text{Q}}} = 4$; $\boxed{\text{RST}}^\circ = 180^\circ$.

[2] 已知$2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$, 且$x$、$y$、$z$均为正数. 设$a = 2x$, $b = \dfrac{5}{2}y$, $c = 3z$, 试比较a、b、c的大小.

求解过程:

(1) 因为$x = y\left(\log_2\boxed{\text{U}} - \boxed{\text{V}}\right)$, $b - a = y\left(\dfrac{\boxed{\text{W}}}{2} - 2\log_2\boxed{\text{U}}\right)$, 所以$a$与$b$比较则$\boxed{\text{X}}$较大.

(2) 因为 $x = z\log_2 \boxed{\text{Y}}$,

$c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{\text{Y}}\right)$,

所以 a 与 c 比较则 $\boxed{\text{Z}}$ 较大.

(3) 利用 $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$, 则 a、b、c 之间的大小关系为: $\boxed{\alpha} < \boxed{\beta} < \boxed{\gamma}$.

参考答案: $\log_2 \boxed{\text{U}} - \boxed{\text{V}} = \log_2 5 - 1$; $\dfrac{\boxed{\text{W}}}{2} = \dfrac{9}{2}$; $\boxed{\text{X}} = a$; $\boxed{\text{Y}} = 3$; $\boxed{\text{Z}} = a$. $\boxed{\alpha} = b$; $\boxed{\beta} = c$; $\boxed{\gamma} = a$.

第二题 (必答题 30 分)

设 a 为常数, C 表示抛物线 $y = x^2 + 2ax - a^3 - 2a^2$, P 为抛物线的顶点.

(1) 因为顶点 P 的坐标为

$\left(\boxed{\text{AB}}, -a^{\boxed{\text{C}}} - \boxed{\text{D}}a^2\right)$,

所以对任意的常数 a, 都有顶点 P 在函数图象 $y = x^{\boxed{\text{E}}} - \boxed{\text{F}}x^2$ 上.

(2) 设 a 在 $-3 \leqslant a < 1$ 的范围运动,

当 $a = \boxed{\text{G}}$ 和 $a = \boxed{\text{HI}}$ 时, 顶点 P 的纵坐标取得最大值;

当 $a = \boxed{\text{JK}}$ 时, 顶点 P 的纵坐标取得最小值.

(3) 设 C_1 为 a 取上述 (2) 中求得的 $\boxed{\text{G}}$ 值时的抛物线;

设 C_2 为 a 取上述 (2) 中求得的 $\boxed{\text{HI}}$ 值时的抛物线;

设 C_3 为 a 取上述 (2) 中求得的 $\boxed{\text{JK}}$ 值时的抛物线.

因为抛物线 C_2、C_3 的方程为

C_2: $y = x^2 - \boxed{\text{L}}x + \boxed{\text{M}}$;

C_3: $y = x^2 - \boxed{\text{N}}x$,

所以 C_1 与 C_2 交点的横坐标 (即 x 坐标) 为: $\dfrac{\boxed{\text{O}}}{2}$,

C_1 与 C_3 交点的横坐标 (即 x 坐标) 为: $\boxed{\text{P}}$,

C_2 与 C_3 交点的横坐标 (即 x 坐标) 为: $\dfrac{\boxed{\text{Q}}}{2}$.

(4) C_1、C_2、C_3 在平面直角坐标系中的图象最恰当的是下列提供的图 1 ~ 4 中图 $\boxed{\text{R}}$ 的图象 (这里省略了坐标轴和曲线名称).

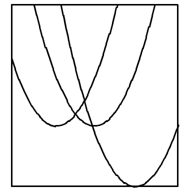


图 1

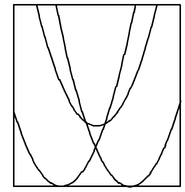


图 2

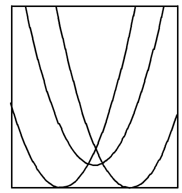


图 3

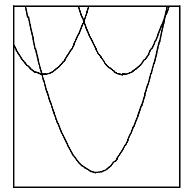


图 4

三支抛物线 C_1、C_2、C_3 所围成的面积为 $\dfrac{\boxed{\text{ST}}}{\boxed{\text{U}}}$.

参考答案: $\boxed{\text{AB}} = -a$; $-a^{\boxed{\text{C}}} - \boxed{\text{D}}a^2 = -a^3 - 3a^2$; $x^{\boxed{\text{E}}} - \boxed{\text{F}}x^2 = x^3 - 3x^2$; $\boxed{\text{G}} = 0$; $\boxed{\text{HI}} = -3$; $\boxed{\text{JK}} = -2$; $x^2 - \boxed{\text{L}}x + \boxed{\text{M}} = x^2 - 6x + 9$; $x^2 - \boxed{\text{N}}x = x^2 - 4x$; $\dfrac{\boxed{\text{O}}}{2} = \dfrac{3}{2}$; $\boxed{\text{P}} = 0$; $\dfrac{\boxed{\text{Q}}}{2} = \dfrac{9}{2}$; $\boxed{\text{R}} = 4$; $\dfrac{\boxed{\text{ST}}}{\boxed{\text{U}}} = \dfrac{27}{2}$.

第三题 (选做题 20 分)

在平面直角坐标系中有三点 $O(0,0)$、$P(4,0)$、$Q(0,3)$, 以这三点为顶点所构成的三角形 OPQ 的内部有一个三角形 ABC (如图 5 所示). 分别过点 A、B、C 向直线 OQ 作垂线, 其垂足为 A_1、B_1、C_1; 分别过点 A、B、C 向直线 OP 作垂线, 其垂足为 A_2、B_2、C_2; 分别过点 A、B、C 向直线 PQ 作垂线, 其垂足为 A_3、B_3、C_3. 并设 A_1 为线段 B_1C_1 的中点; B_2 为线段 A_2C_2 的中点; C_3 为线段 A_3B_3 的中点.

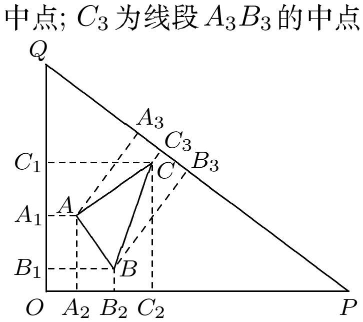


图 5

求解过程:

设$\overrightarrow{AB}=(x,y)$, $\overrightarrow{AC}=(z,w)$. 因为点$A_1$是线段$B_1C_1$的中点, 故有$w=\boxed{\text{A}}y$; 又由于点$B_2$是线段$A_2C_2$的中点, 因此得到$z=\boxed{\text{B}}x$. 设线段$AB$的中点为$D$, 因为点$C_3$是线段$A_3C_3$的中点, 所以有$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{\text{C}}$.

还因为$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{\text{DE}},\boxed{\text{F}}\right)$,

$$\overrightarrow{CD}=\frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{I}}\,\overrightarrow{AC}\right),$$

故$y=\dfrac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}x$. 从而$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\dfrac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}\right)$,

$\overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{\text{B}},\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\right)$, 则$AC=\dfrac{\boxed{\text{O}}\sqrt{\boxed{\text{PQ}}}}{\boxed{\text{R}}}AB$,

$$\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ST}}}}{\boxed{\text{UV}}}.$$

参考答案: $\boxed{\text{A}}y=-y$; $\boxed{\text{B}}x=2x$; $\boxed{\text{C}}=0$; $\left(\boxed{\text{DE}},\boxed{\text{F}}\right)=(-4,3)$; $\dfrac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}(\overrightarrow{AB}-\boxed{\text{I}}\,\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$; $\dfrac{\boxed{\text{JK}}}{\boxed{\text{L}}}=\dfrac{-4}{3}$; $\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}=\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{\boxed{\text{O}}\sqrt{\boxed{\text{PQ}}}}{\boxed{\text{R}}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{5}$; $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ST}}}}{\boxed{\text{UV}}}=\dfrac{\sqrt{13}}{65}$.

第四题(选做题20分)

设两个复数p、q与三个相异的复数α、β、γ满足下列关系式:

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad ①$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p, \quad ②$$
$$\alpha\beta\gamma=q, \quad ③$$

复数α、β、γ在复平面上所对应的三点分别为A、B、C. 设三角形ABC为$AB=AC$的等腰直角三角形, 这时有

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{AB}}^\circ,\quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{C}}.$$

这里复数z的辐角满足不等式$-180^\circ\leqslant\arg z<180^\circ$, 下面均假设

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{AB}}^\circ.$$

由 ① 可得到

$$\beta=\frac{\boxed{\text{DE}}+\boxed{\text{F}}\,\mathrm{i}}{\boxed{\text{G}}}\alpha,\ \gamma=\frac{\boxed{\text{HI}}-\boxed{\text{J}}\,\mathrm{i}}{\boxed{\text{K}}}\alpha;$$

由 ②、③ 进一步可得到

$$p=\frac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\alpha^{\boxed{\text{N}}},\ q=\frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\alpha^{\boxed{\text{Q}}}.$$

从而p、q必须满足式子:

$$\boxed{\text{RS}}\,p^{\boxed{\text{T}}}=\boxed{\text{UV}}\,q^{\boxed{\text{W}}}.$$

设复平面上还有一点D, 当四边形$ABCD$为正方形时, 则与点D相应的复数为$\boxed{\text{XY}}\,\alpha$.

参考答案: $\boxed{\text{AB}}^\circ=90^\circ$; $\boxed{\text{C}}=1$;

$\dfrac{\boxed{\text{DE}}-\boxed{\text{F}}\,\mathrm{i}}{\boxed{\text{G}}}=\dfrac{-1+3\,\mathrm{i}}{2}$;

$\dfrac{\boxed{\text{HI}}-\boxed{\text{J}}\,\mathrm{i}}{\boxed{\text{K}}}=\dfrac{-1-3\,\mathrm{i}}{2}$;

$\dfrac{\boxed{\text{L}}}{\boxed{\text{M}}}\alpha^{\boxed{\text{N}}}=\dfrac{3}{2}\alpha^2$; $\dfrac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{P}}}\alpha^{\boxed{\text{Q}}}=\dfrac{5}{2}\alpha^3$;

$\boxed{\text{RS}}\,p^{\boxed{\text{T}}}=50p^3$; $\boxed{\text{UV}}\,q^{\boxed{\text{W}}}=27q^2$;

$\boxed{\text{XY}}\,\alpha=-2\alpha$.

第五题(选做题20分)

骰子最多掷5次, 根据掷出的结果给一个相应的点数, 具体游戏规则如下:

掷出骰子若出现数字5或6, 则称发生了事件A. 在掷骰子的过程中首次出现事件A, 则计点数为1, 然后继续游戏. 再次出现事件A, 则得到点数2, 加上前面得到的1点, 合计点数为3, 此时游戏结束. 如果5次中, 只有一次发生了事件A, 那么得1点, 游戏也随之结束; 如果5次中, 没有一次发生事件A, 则在原来拥有的点数上减去m点(m是事先定好的).

小D按上面规则玩了这个游戏, 假设小D最初具有点数a(设a、m为自然数, $a\geqslant m$), 这个游戏结束时, 设小D具有的点数为概率变量X, 则

(1) $X=a+1$的概率为$\dfrac{\boxed{\text{AB}}}{243}$.

(2) 正好掷4次游戏结束的概率为$\dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{DE}}}$; 掷4次或掷5次游戏结束的概率为$\dfrac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{HI}}}$.

(3) 掷了3次还没有发生事件A的概率为

$\dfrac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{KL}}}$; 掷了3次还没有发生事件A时, $X>a$ 的条件概率为 $\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}$.

(4) 概率变量X的期望

$$E(X)=a+\frac{\boxed{\text{OPQ}}-\boxed{\text{RS}}m}{243};$$

使得$E(X)>a$的最大自然数m为$\boxed{\text{TU}}$.

参考答案: $\dfrac{\boxed{\text{AB}}}{243}=\dfrac{80}{243}$; $\dfrac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{DE}}}=\dfrac{4}{27}$; $\dfrac{\boxed{\text{FG}}}{\boxed{\text{HI}}}=\dfrac{20}{27}$; $\dfrac{\boxed{\text{J}}}{\boxed{\text{KL}}}=\dfrac{8}{27}$; $\dfrac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}=\dfrac{5}{9}$; $\dfrac{\boxed{\text{OPQ}}-\boxed{\text{RS}}m}{243}=\dfrac{473-32m}{243}$; $\boxed{\text{TU}}=14$.

第六题(选做题20分)

在某银行存钱, 存满一个周期得利息, 利息的计算方法是本金的5%, 在期末结算. 比如有本金a万日币, 则期满后可得到本利金为$1.05\times a$万日币. 在第一个周期的期初有位A先生在该银行已有储蓄额为b万日币, A先生将从这b万中取出m万日币, 而将剩余的作为定期, 则剩余额存满一个周期后可得到5%的利息. 这里假设$b>m$. 从第二个周期开始, A先生预定在每个周期的期初从储蓄额中取出m万日币, 如果余额一旦不满m万日币, 那么将取出所有的余额. 在以下的问题中, INT(X)表示不超过X的最大整数.

(1) 下面的程序是一个用来查找需要几个周期才能使储蓄余额成为0日币的程序. 在该程序中, 当给出自然数b和m时, 在第n个周期的期初若取出储蓄额后余额为0元, 则输出自然数n.

【程序1】

```
100    INPUT "B =";B
110    INPUT "M =";M
120    N = 0
130    N = N + 1
140    B = 1.05 * (B - M)
150    IF B>0 THEN GOTO [ABC]
160    PRINT N
170    END
```

请将上述程序中的空格$\boxed{\text{ABC}}$填好, 完成该程序.

(2) 改变上述程序的第160句, 若要输出在最终周期取出的金额不满1万日币被舍弃的金额, 那么只要改变第160句的$\boxed{\text{D}}$即可. 注意这里金额的单位为万日币. 上述空格$\boxed{\text{D}}$, 请根据以下提供的①～⑥个选项中选择一个正确的.

① PRINT N, INT(B);

② PRINT N, INT$(B+M)$;

③ PRINT N, INT$(B-M)$;

④ PRINT N, INT(1.05^*B);

⑤ PRINT N, INT$(B/1.05+M)$;

⑥ PRINT N, INT$(B/1.05-M)$.

(3) 设在第1周期期初的储蓄额为2150万日币, 从中取走100万后, 则在第1个周期末可得到本利和为2152万, 比第1周期期初时的2150万有所增加. 若在每个周期的期初取出100万日币, 设在第n个周期的期末储蓄余额为c_n万日币, 那么$c_{n+1}=1.05(c_n-m)$, 从而有$c_{n+1}-c_n=1.05(c_n-c_{n-1}), n=1,2,\cdots$ (这里$c_0=2150$), 因此如果$c_1-c_0\geqslant 0$, 那么储蓄余额将不会减少, 这里的c_1据m和c_0而定, 满足$c_1-c_0\geqslant 0$的最大的自然数m为$\boxed{\text{EFG}}$.

(4) 下面的程序是用来计算要使A先生的储蓄余额经过n周期后不为0, 那么在第1个周期的期初所必需的储蓄额b万日币的. 这里$n\geqslant 2$.

【程序2】

```
100    INPUT "N =";N
110    INPUT "M =";M
120    I = N
130    B = M
140    B = B/1.05 + M
150    I = I - 1
160    IF I>1 THEN GOTO [HIJ]
170    PRINT [K]
180    END
```

请将上述程序中的空格$\boxed{\text{HIJ}}$和$\boxed{\text{K}}$填

韦恩图的起源

232001 安徽省淮南市第一中学(华东师大数学系教育硕士) 张厚品

现今的数学课本在表示集合或集合与集合之间的关系时往往都会用到简洁明了、直观易懂的韦恩图. 韦恩图起源何时? 韦恩是何许人? 我们知之甚少. 就连美国著名数学史家卡约黎(F·Cajori, 1859～1930)在名著《数学符号的历史》中也没有提到韦恩这个名字.

约翰·韦恩(John Venn, 1834～1923)1834年出生于英格兰赫尔(Hull)的多尔普(Drypool). 1853年进剑桥大学学习, 四年后获数学学士学位, 在数学学位考试中获得一等第六名, 不久成为剑桥大学的研究员. 1859年, 韦恩成为一名牧师. 1862年, 他又回到了剑桥大学, 讲授逻辑学和概率论, 对德·摩根(De Morgan, 1806～1871)和乔治·布尔(George Boole, 1815～1864)的逻辑学以及概率论很感兴趣并深有研究. 1880年, 韦恩创作了一部重要的作品——《符号逻辑》. 1883年, 他被选为英国皇家学会会员. 同年, 被授予剑桥大学理学博士学位. 在这之后, 他的研究兴趣转向历史学. 除了逻辑和历史, 他还是"优秀的步行者和登山者、一个热心的植物学家、出色的演讲者和语言学家." 1923年卒于剑桥大学.

韦恩最为世人所熟知的贡献莫过于"韦恩图"了. 这种用图形表示集合(或命题)的方法出现于他的《符号逻辑》一书. 韦恩首先从两个相交的集合x和y(原书用小写字母来表示)出发, 用图1表示四种集合: 既属于x、又属于y的元素组成的集合; 属于x但不属于y的元素组成的集合; 属于y但不属于x的元素组成的集合; 既不属于x又不属于y的元素组成的集合. 分别用xy、xy'、$x'y$、$x'y'$来表示(x'和y'分别表示不属于x和y的元素组成的集合, 下文中的表示法与此类似).

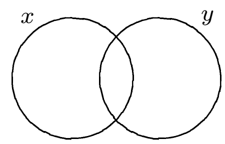


图 1

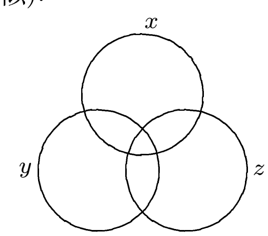


图 2

接着, 韦恩用图2所示的三个相交圆x、y和z来表示八种集合: 同时属于x、y和z的元素组成的集合; 属于y、z, 但不属于x的元素组成的集合; ……; 不属于x、y和z的元素组成的集合. 分别用xyz、$x'yz$、$xy'z$、xyz'、$xy'z'$、$x'yz'$、$x'y'z$和$x'y'z'$来表示.

用两两相交的四个圆不能表示16个集合, 于是韦恩使用了4个全等的椭圆, 如图3所示.

对于五个两两相交的集合, 韦恩使用了4个全等的椭圆分别表示集合x、y、w、v, 用一个圆和一个小椭圆之间的部分表示集合z, 这样便表示出了32个集合, 如图4所示, 图中间的那个小椭圆的内部表示集合z的外部的一部分.

好, 完成该程序. 空格$\boxed{\text{K}}$请根据以下提供的①～⑤个选项中选择一个正确的.

① INT(B); ② INT($B/1.05$);

③ INT($B/1.05+1$); ④ INT($B+1$);

⑤ INT($(B+1)/1.05$).

执行该程序, 当出现$N=?$, 输入3; 当出现$M=?$, 输入90. 在第170句中, $\boxed{\text{LMN}}$被输出, 这时第140句将被执行了$\boxed{\text{O}}$次.

参考答案: $\boxed{\text{ABC}}=130$; $\boxed{\text{D}}=5$; $\boxed{\text{EFG}}=102$; $\boxed{\text{HIJ}}=140$; $\boxed{\text{K}}=4$; $\boxed{\text{LMN}}=258$; $\boxed{\text{O}}=2$.

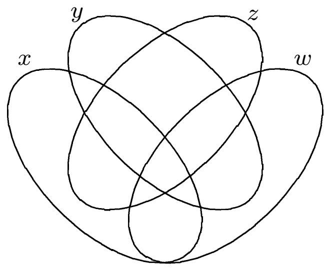


图 3

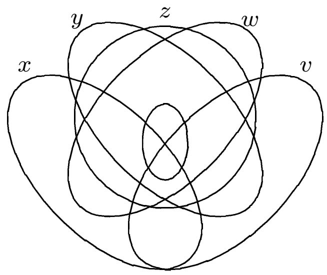


图 4

接着, 韦恩着手用图形来表示命题, 用阴影部分来表示否定这个命题. 最后, 作为应用, 韦恩举了如下的例子:

在某考试中心, 希腊文和拉丁文中一门是必考课程. 如果考生只报考希腊文, 或只报考拉丁文, 那么他就必须同时考英语和法语. 如果考生同时报考了希腊文和拉丁文, 那么他只需考英语和法语中的一门. 假设三种语言的每一个组合都有人报考, 那么是否有考生同时报考了四门语言?

作出图5, 其中G、L、E和F分别表示希腊文、拉丁文、英文和法文. 根据报考规定, 应排除$G'L'$、$GL'E'$、$GL'F'$、$G'LE'$、$G'LF'$、$GLE'F'$. 用阴影标出这些集合. 于是得到GLE、GEF、GLF和LEF, 分别标上1、2、3、4. 显然, 四个集合都可以存在, 但不一定非要有中央部分($GLEF$)不可. 也就是说, 尽管可以有考生同时报考四门语言, 但我们不能推断一定会有这样的考生.

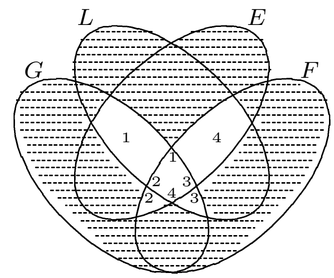


图 5

1957年, 美国数学家麦克沙恩(E. J. Mc-shane, 1904～1989) 首次给"韦恩图"下了定义, 称其为"一个集合的符号表示法, 用平面的某个部分来表示所考虑的对象, 用某条封闭曲线内部的点来表示一个集合." 从那时起, 韦恩图就一直沿用至今.

参考文献

[1] S. M. Stephanie. Venn diagram. The Mathematics Teacher. 1963. 56: 98-101.

[2] J. J. O' Connor & E. F. Robertson. John Venn. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Venn.html

编后漫笔

《数学教学》50岁有感

张奠宙　赵小平

《数学教学》50岁了. 刊物的创办者大多已成古人. 我们组织了几位健在的老人, 说一些老话, 再刊发一些"老文", 供大家遥想当年. 与此同时, 也有一些编者的回顾, 读者的评议, 为今后的工作进行谋划. 在此, 我们衷心感谢为庆贺本刊创立50周年撰文的各位先生, 感谢读者对刊物的关怀. 不过, 纪念特刊中当然应该有庆贺和纪念的文字, 却也不可过多. 刊物毕竟要反映现实, 特别正值高考之后.

记得有首歌叫做"革命人永远是年青". 对人生来说, 50岁, 年过半百, 将要步入老年. 至于《数学教学》的50岁, 也许正是青年时期. 尽管数学教育的历史几乎和人类的历史一样长, 但是它的规律还远远没有为我们所认识. 甚至有人认为"数学教育"还处于襁褓时期, 是名副其实的"朝阳学科".

经过改革开放20年, 国家的面貌发生了翻天覆地的变化. 各种教育事业的发展也达到了历史上从未有过的高水平. 值得深思的是, 数学教育的水平是否比建国初期有了飞跃的提高呢? 恐怕未见得. 悲观者甚至认为今天的数学教学水平不及1960年代. 总之, 需要我们做的事情太多太多. 进入21世纪之后, 我们正处在数学教育改革的潮头上. 改革发展是硬道理. 面对时代的需要, 无论碰到什么困难, 我们都应该保持旺盛的斗志, 保持"革命人永远年青"的心态.

当前正在进行的教育改革, 百年难遇. 我国数学课程的大变革, 在20世纪只有两次: 五四运动时数学教育的学校化, 以及建国之后在学习苏联基础上形成自己的体系. 第三次大改革现在正在进行. 能够躬逢其盛, 岂不是我们的幸运? 愿我们在改革的风浪中搏击, 在变革中冲浪. 改革必然有争论, 正确的需要坚持, 错误的需要修正, 而坚持和修正都需要革命者勇气. 历史将会记住每个人在改革中留下的身影和足迹. 《数学教学》将提供这样的文字记录平台.

早先有一句话是"思想积极, 行动稳妥". 投入任何改革, 没有激情是不行的, 而只有激情也是不够的. 在未来的岁月里, 愿我们大家都保持年轻的心态, 用高度的热情、智慧和理性, 为建设中国独特的数学教育体系而努力奋斗.

期待《数学教学》的今后50年更加辉煌! 祝本刊读者事业成功!

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第7期
(总第214期)
主编: 张奠宙　赵小平
常务副主编: 忻重义
电　话: 021-62232712

主办单位: 华东师范大学
出　　版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字07017号
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31-1024/G4　每月12日出版　代号: 4-357